

عن الوحي

الانجيلي

عن الوحي

عن الوحي

عن الوحي

عن الوحي

عن الوحي

عن الوحي

عن الوحي

عن الوحي

عن الوحي

عن الوحي

عن الوحي

عن الوحي

عن الوحي

عن الوحي

بسم الله الرحمن الرحيم

هو علم دراسة
دون العرض للمع
المؤثر كنهه

هو عالم باحث
في فروع دراسة الاقتصاد
والعقود مع الزمان

هو علم دراسة الخصائص الثابتة
أو المتغيرة
القوة الدافعة، والسموم، العقل
الروح، والذوات، وما كثر من

أول حادثة حصلت عنما في موضوعنا النفاذ الى مياه البحر، وكما نرى من

(أ) كميات غير متناهية : هي الكميات التي يمكن أن تكون معرفة مقدارها مثل (الزمن ، درجة الحرارة ، المسافة ، الدوام ، ...) .

(ب) كميات متناهية : هي الكميات التي يمكن أن تكون معرفة مقدارها مثل (عدد التلاميذ ، عدد الفصول ، عدد الحصص ، ...) .

إذا قرئنا $\frac{ab}{A}$ فنتساءل ما هو النوع a الى النوع b في الفراغ
بيننا النسبتين هنا بالرمز $\frac{ab}{A}$ أو $\frac{ab}{A}$ (كمية)

$A = ab - |A| - |ab|$ لیس کے لیے

← وقال ابن القيم في A و B : كلاهما كذا

$A=B$. Bill (and) both, both @ 0.5 shares

$$A = A_x \hat{i} + A_y \hat{j} + A_z \hat{k} \text{ của trục } x, y, z \leftarrow$$

$$|A| = \sqrt{(A_x)^2 + (A_y)^2 + (A_z)^2}$$

Claytonia virginica

خاورالافق
در این روزها که در این زمانه است
که در این روزها که در این زمانه است



$$\frac{A}{\sin \gamma} = \frac{B}{\sin \alpha} = \frac{C}{\sin \beta}$$

$$\hat{A} = A = A, |\hat{A}| = 1$$

$|A| = 1$; $|A| = 1$

مثال: أوجد مشتق الوتة $\underline{A} = 6\hat{i} + 2\hat{j} + 3\hat{k}$

$$\hat{A} = \frac{A}{|A|} = \frac{6\hat{i} + 2\hat{j} + 3\hat{k}}{\sqrt{36 + 4 + 9}} = \frac{1}{7} (6\hat{i} + 2\hat{j} + 3\hat{k})$$

اوصاف انک انحصار سے ہیں (5) انحصار سے انحصار کا ایک = 1 ہے

$$|A| = \frac{\sqrt{36+4+2}}{7} = \boxed{1}$$

14. $\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1$

المواد الحساسة $PCMS$ و $PCMS$ متواجدين في المواد البلاستيكية

ویندازه فایده (البسته فایده) و نیز به روز $\underline{r}$ و $P(x, y, z)$ و یک کاتب

$$\underline{r} = x\underline{i} + y\underline{j} + z\underline{k}$$

فيكون مقدار القوة الموضوعة على

$$r = |\underline{r}| = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$$

فيكون صيغة التفاضل P_1, P_2 هي

$$P_1(x_1, y_1, z_1) \text{ و } P_2(x_2, y_2, z_2)$$

$\overline{Y_2} = \overline{P_1 P_2} = \overline{P_2 - \overline{P_1}} = (X_2 - X_1)\overline{C} + (Y_2 - Y_1)\overline{D} + (Z_2 - Z_1)\overline{E}$ (نقطة)

$$1, \sqrt{2}, \sqrt{5}$$

المسألة (المعبر) :- بين ان المسافة بين النقطتين $P_1(1, -1, 2)$ و $P_2(3, -2, 4)$ هي $\sqrt{9}$.
 مثال (1) : يتحرك جسم في خط مستقيم من النقطة $P_1(1, -1, 2)$ الى النقطة $P_2(3, -2, 4)$.
 اوجد متجه السرعة والمسافة بين النقطتين ثم اوجد متجه الوحدة له .

الحل

متجه موضع النقطة P_1 هو $\vec{r}_1 = \hat{i} - \hat{j} + 2\hat{k}$ ومتجه موضع P_2 هو $\vec{r}_2 = 3\hat{i} - 2\hat{j} + 4\hat{k}$.
 فيكون متجه الاتجاه $\vec{r}_{21}$ هو $\vec{r}_2 - \vec{r}_1$ حيث

$$\vec{r}_{21} = \vec{r}_2 - \vec{r}_1 = (3\hat{i} - 2\hat{j} + 4\hat{k}) - (\hat{i} - \hat{j} + 2\hat{k})$$

$$= 2\hat{i} - \hat{j} + 2\hat{k}$$

والسافة المقطوعة بين النقطتين تساوي مقدار $\vec{r}_{21}$ اذا

$$|\vec{r}_{21}| = \sqrt{4 + 1 + 4} = \sqrt{9} = 3$$

متجه الوحدة طبق الاتجاه

$$\hat{r}_{21} = \frac{\vec{r}_{21}}{|\vec{r}_{21}|} = \frac{2\hat{i} - \hat{j} + 2\hat{k}}{3}$$

$$\hat{r}_{21} = \frac{1}{3} (2\hat{i} - \hat{j} + 2\hat{k})$$

مثال (2) :- اوجد متجه الوحدة الموازي لمجملة المتجهات $\vec{F}_1 = 3\hat{i} - 2\hat{j} + \hat{k}$ ، $\vec{F}_2 = 2\hat{i} - 4\hat{j} - 3\hat{k}$ و $\vec{F}_3 = -\hat{i} + 2\hat{j} + 2\hat{k}$.

الحل

$$\vec{F} = \vec{F}_1 + \vec{F}_2 + \vec{F}_3$$

اولاً نوجد متجه المجملة $\vec{F}$

$$\vec{F} = (3\hat{i} - 2\hat{j} + \hat{k}) + (2\hat{i} - 4\hat{j} - 3\hat{k}) + (-\hat{i} + 2\hat{j} + 2\hat{k})$$

$$\vec{F} = 4\hat{i} - 4\hat{j}$$

$$\hat{F} = \frac{\vec{F}}{|\vec{F}|} = \frac{4\hat{i} - 4\hat{j}}{\sqrt{16 + 16}} = \frac{4\hat{i} - 4\hat{j}}{\sqrt{32}} = \frac{4(\hat{i} - \hat{j})}{4\sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}} (\hat{i} - \hat{j})$$

محاضرة / ١٩٩٥

الزاوية
مترادف

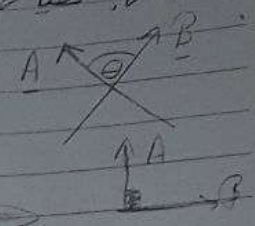
• ضرب المتجهات

عكسها الكميات القياسية فان الناتج ليس كمية قياسية فليس لها وحدة
عند ضرب المتجهات الناتج يكون إما كمية قياسية أو متجهة تختلف حسب نوع المتجهين

I) الضرب المتجهي : يعرف بأنه حاصل ضرب متجهين المتجهين في اتجاههما

$$\underline{A} \cdot \underline{B} = AB \cos \theta$$

الزاوية بين المتجهين
(الناتج كمية قياسية)



هذا الناتج في زاوية

$$\text{فاحتمالاً } \underline{A} \cdot \underline{B} = 0 \quad \left\{ \begin{array}{l} \underline{A} = 0 \text{ or } \underline{B} = 0 \\ \underline{A} \perp \underline{B} \end{array} \right.$$

II) خواص ضرب المتجهات

$$\underline{A} \cdot \underline{B} = \underline{B} \cdot \underline{A}$$

قانون التبادل

$$\underline{A} \cdot \underline{A} = |\underline{A}|^2 = A^2$$

(I)

$$\underline{A} \cdot (\underline{B} + \underline{C}) = \underline{A} \cdot \underline{B} + \underline{A} \cdot \underline{C}$$

(II)

$$\underline{i} \cdot \underline{i} = \underline{j} \cdot \underline{j} = \underline{k} \cdot \underline{k} = 1$$

(III)

$$\underline{i} \cdot \underline{j} = \underline{j} \cdot \underline{k} = \underline{i} \cdot \underline{k} = 0$$

إذا كانت المتجهات الثلاث في اتجاه المحاور الثلاثة، وإذا كان لها اتجاه واحد
الموجة $\underline{A} = A_x \underline{i} + A_y \underline{j} + A_z \underline{k}$, $\underline{B} = B_x \underline{i} + B_y \underline{j} + B_z \underline{k}$

$$\underline{A} \cdot \underline{B} = A_x B_x + A_y B_y + A_z B_z$$

مثال :- إذا كانت الزاوية بين المتجهين $\underline{A} = (2, 2, -1)$, $\underline{B} = (3, 12, 4)$

$$\underline{A} \cdot \underline{B} = AB \cos \theta \quad \xrightarrow{\text{الحل}} \quad \cos \theta = \frac{\underline{A} \cdot \underline{B}}{AB}$$

$$A = |\underline{A}| = \sqrt{4+4+1} = \sqrt{9} = 3, \quad B = |\underline{B}| = \sqrt{9+144+16} = \sqrt{169} = 13$$

$$\underline{A} \cdot \underline{B} = 6 + 24 - 4 = 26 \quad \cos \theta = \frac{26}{3 \cdot 13} = \frac{2}{3}$$

$\underline{A} = A_x \underline{i} + A_y \underline{j} + A_z \underline{k}$

$$A \neq 0, B \neq 0 \Rightarrow A \wedge B = 0$$

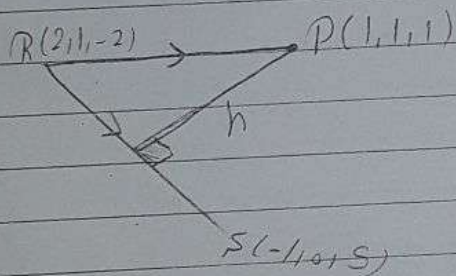
$$\frac{A_x}{B_x} = \frac{A_y}{B_y} = \frac{A_z}{B_z} = c \quad \leftarrow \text{lines}$$

المساحة المثلثية المثلثية المثلثية

$$h = \frac{|AP \wedge AB|}{|AB|} \quad \text{طول العمود الساقط من النقطة A على المستوية}$$

$$A = \frac{1}{2} |A \wedge B| = \text{Area of } \triangle ABC$$

المساحة المثلثية المثلثية المثلثية
 $P(1,1,1)$ طول العمود الساقط من النقطة A على المستوية
 $R(2,1,-2), S(-1,0,5)$ المستقيم الواصلة بين النقطتين



$$h = \frac{|RP \wedge RS|}{|RS|}$$

$$RP = P - R = -\hat{i} + 0\hat{j} + 3\hat{k}$$

$$RS = S - R = -3\hat{i} - \hat{j} + 7\hat{k}$$

$$RP \wedge RS = \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ -1 & 0 & 3 \\ -3 & -1 & 7 \end{vmatrix} = 3\hat{i} - 2\hat{j} + \hat{k} \Rightarrow |RP \wedge RS| = \sqrt{9+4+1} = \sqrt{14}$$

$$|RS| = \sqrt{9+1+49} = \sqrt{59}$$

$$\therefore h = \frac{\sqrt{14}}{\sqrt{59}} = \sqrt{\frac{14}{59}}$$

ROY

٢٠ / ٤ / ٢٠٢٠
جمال

الضرب الثلاثي القياسي :-

الرمز لحاصل الضرب الثلاثي القياسي للمتجهات $\underline{A}, \underline{B}, \underline{C}$ بالرمز $\underline{A} \cdot (\underline{B} \wedge \underline{C})$ أو $(\underline{B} \wedge \underline{C}) \cdot \underline{A}$ (أي أنه أبالي) ، واللانح تسوية كميات قياسية

خواص الضرب الثلاثي :-

(أ) إذا كانت متجهات المتجهات $\underline{A}, \underline{B}, \underline{C}$ هي

$$\underline{A} = (A_x, A_y, A_z), \quad \underline{B} = (B_x, B_y, B_z), \quad \underline{C} = (C_x, C_y, C_z)$$

$$\underline{A} \cdot (\underline{B} \wedge \underline{C}) = [\underline{A}, \underline{B}, \underline{C}] = \begin{vmatrix} A_x & A_y & A_z \\ B_x & B_y & B_z \\ C_x & C_y & C_z \end{vmatrix} \quad \text{حان}$$

$$\underline{A} \cdot (\underline{B} \wedge \underline{C}) = \underline{B} \cdot (\underline{C} \wedge \underline{A}) = \underline{C} \cdot (\underline{A} \wedge \underline{B}) = [\underline{A}, \underline{B}, \underline{C}] \quad (٢)$$

(٣) حاصل الضرب الثلاثي القياسي للمتجهات $\underline{A}, \underline{B}, \underline{C}$ يساوي حجم متوازي السطوح الذي تحده $\underline{A}, \underline{B}, \underline{C}$.

(٤) إذا كان $[\underline{A}, \underline{B}, \underline{C}] = 0$ فإنه يوجد ٣ احتمال

(أ) هناك على الأقل متجه من الثلاثة صفري .

(ب) أو متجهان من الثلاثة على الأقل متوازيان .

(ج) أو المتجهات الثلاثة تقع في مستوى واحد .

شروط وقوع ٣ متجهات غير صفريين في مستوى واحد هو أنه يكون حاصل ضربها الثلاثي القياسي مساوياً للصفر .

النتيجة

على $\underline{A}, \underline{B}, \underline{C}$ أن يكونوا متوازيين أو متعامدين أو متوازيين

مثال 1: أوجد قيمة الثابت d في بقية المتجهات الثلاثة (التي هي في مستوى)

$$\underline{A} = 2\underline{i} + \underline{j} - 2\underline{k}, \quad \underline{B} = \underline{i} + \underline{j} + 3\underline{k}, \quad \underline{C} = \underline{i} + d\underline{j}$$

الحل:
لأن المتجهات الثلاثة $\underline{A}, \underline{B}, \underline{C}$ في مستوى، يجب أن يقع الثلاثة في نفس المستوى. وبالتالي يجب أن تكون محدد الثلاثة

$$\underline{A} \cdot (\underline{B} \times \underline{C}) = 0$$

$$\begin{vmatrix} 2 & 1 & -2 \\ 1 & 1 & 3 \\ 1 & d & 0 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow 2(-3d) + 3 - 2(d-1) = 0$$

$$-6d + 3 - 2d + 2 = 0$$

$$-8d + 5 = 0 \Rightarrow 8d = 5 \Rightarrow d = \frac{5}{8}$$

مثال 2: إذا كان $\underline{a}, \underline{b}, \underline{c}$ في مستوى، فإن $\underline{a} \cdot (\underline{b} \times \underline{c}) = 0$

$$\underline{a} \cdot (\underline{b} \times \underline{c}) = 0$$

والمتجهات الثلاثة تقع في مستوى واحد، إذا كان حاصل ضربها القياسي يساوي صفر.

$$\underline{a} + \underline{b} + \underline{c} = 0 \quad (1)$$

بضرب (1) في المتجه $\underline{b}$

$$(\underline{b} \cdot \underline{a}) + (\underline{b} \cdot \underline{b}) + (\underline{b} \cdot \underline{c}) = 0$$

وهذه خواص الضرب القياسي

$$\underline{b} \cdot \underline{b} = |\underline{b}|^2 \quad (2)$$

بضرب (2) في المتجه $\underline{a}$

$$\underline{a} \cdot (\underline{b} \cdot \underline{a}) + \underline{a} \cdot (\underline{b} \cdot \underline{c}) = 0$$

وهذه خواص الضرب القياسي

$$\underline{a} \cdot (\underline{b} \cdot \underline{a}) = 0$$

$$\underline{a} \cdot (\underline{b} \cdot \underline{c}) = 0$$

وبالتالي $\underline{a} \cdot (\underline{b} \times \underline{c}) = 0$

المبدأ الثالث الثالث :-

يقع $A \cap (B \cap C)$ داخل كل من $(A \cap B) \cap C$ و $(A \cap C) \cap B$

$$\begin{aligned} A \cap (B \cap C) &= (A \cap C) \cap B = (A \cap B) \cap C \\ (A \cap B) \cap C &= (A \cap C) \cap B = (B \cap C) \cap A \end{aligned}$$

مثال: أثبت أن

$$A \cap (B \cap C) + B \cap (C \cap A) + C \cap (A \cap B) = 0$$

الحل

$$L.H.S = A \cap (B \cap C) + B \cap (C \cap A) + C \cap (A \cap B)$$

بالنظر إلى المبدأ الثالث

$$\begin{aligned} L.H.S &= (A \cap C) \cap B + (B \cap A) \cap C + (C \cap B) \cap A \\ &= (A \cap C) \cap B + (B \cap A) \cap C + (C \cap B) \cap A = 0 = R.H.S \end{aligned}$$

مثال: إذا كانت المقطوع a, b, c, d تقع على مستوي واحد

أثبت أن

$$(a \cap b) \cap (c \cap d) = 0$$

الحل

$$\begin{aligned} (a \cap b) \cap (c \cap d) &= 0 \\ \text{بفرض أن } a \cap b &= E \\ L.H.S &= E \cap (c \cap d) = (E \cap d) \cap c = (E \cap c) \cap d \\ &= [c \cap b] \cap d = [c \cap a] \cap d = 0 \end{aligned}$$

بالنظر إلى E

ولكن ما عد المبدأ الثالث، لأن متجهي a و b يقعان على مستوي واحد

$$L.H.S = (0) \cap c = (0) \cap d = 0 = R.H.S$$

الوقت الوحيد
الذي يمكن استخدامه
لحل المسألة هو
الوقت الذي
يكون فيه
الوقت
الذي
يكون فيه
الوقت
الذي
يكون فيه

$$\underline{a} \cdot \underline{x} = \underline{a} \cdot \underline{b}$$

فوليد النتيجة $\bar{x}$ التي تحقق المعادلة
 $\underline{a} \cdot \underline{x} = \underline{b}$ ، $\underline{a} \cdot \underline{b} = 0$

$$\underline{a} \cdot \underline{x} = \underline{a} \cdot \underline{b} \quad (1)$$

نضرب (1) في $\underline{a}$ من اليمين

$$\underline{a} \cdot (\underline{a} \cdot \underline{x}) = \underline{a} \cdot (\underline{a} \cdot \underline{b})$$

$$(\underline{a} \cdot \underline{x}) \cdot \underline{a} = (\underline{a} \cdot \underline{a}) \cdot \underline{x} = (\underline{a} \cdot \underline{b}) \cdot \underline{a} = (\underline{a} \cdot \underline{a}) \cdot \underline{b}$$

$$\underline{b} \cdot \underline{a} - \underline{a}^2 \cdot \underline{x} = (\underline{a} \cdot \underline{a}) \cdot \underline{b} - \underline{a}^2 \cdot \underline{b}$$

$$\underline{b} \cdot \underline{a} - \underline{a}^2 \cdot \underline{x} = -\underline{a}^2 \cdot \underline{b} \Rightarrow \underline{a}^2 \cdot \underline{x} = \underline{b} \cdot \underline{a} + \underline{a}^2 \cdot \underline{b}$$

$$\underline{x} = \frac{\underline{b} \cdot \underline{a} + \underline{a}^2 \cdot \underline{b}}{\underline{a}^2}$$

مثال: إذا كان $\underline{x} \cdot \underline{a} = 0$ ، $\underline{b} \cdot \underline{x} = \underline{a}$ ، فثبت أن

$$\underline{a} = \frac{\underline{a} \cdot \underline{b}}{\underline{a}^2} , \quad \underline{x} = \frac{(\underline{a} \cdot \underline{b}) \cdot \underline{a}}{\underline{a}^2}$$

نضرب (1) في $\underline{a}$ من اليمين فيلاحظ أن

$$\underline{a} \cdot \underline{b} - \underline{a} \cdot \underline{x} = \underline{a} \cdot \underline{a} \Rightarrow \underline{a} \cdot \underline{b} - \underline{x} \cdot \underline{a} = \underline{a}^2$$

$$\underline{a} = \frac{\underline{a} \cdot \underline{b}}{\underline{a}^2} \Rightarrow *$$

$$\underline{b} \cdot \underline{x} = \underline{a}$$

$$(\underline{a} \cdot \underline{b}) \cdot \underline{a} = (\underline{a} \cdot \underline{x}) \cdot \underline{a} = (\underline{a} \cdot \underline{a}) \cdot \underline{a}$$

الوصف
الخطوط القابلة للتخفاء
من السلاسل والخطوط

$$(a \cdot a) \underline{b} - (b \cdot a) \underline{a} - (a \cdot a) \underline{x} + (x \cdot a) \underline{a}$$

$$= (a \cdot a) \underline{a} - (a \cdot a) \underline{a}$$

$$(a \cdot a) \underline{b} - (b \cdot a) \underline{a} - a^2 \underline{x} + 0 = a^2 \underline{a} - a^2 \underline{a}$$

$$a^2 \underline{x} = (a \cdot a) \underline{b} - (b \cdot a) \underline{a}$$

$$a^2 \underline{x} = (a \cdot b) \underline{a}$$

$$\Rightarrow \underline{x} = \frac{(a \cdot b) \underline{a}}{a^2} \rightarrow \text{XX}$$

$$\therefore \underline{b} - \underline{x} = \underline{a}$$

هذا غير

$$\therefore \underline{x} = \underline{b} - \underline{a} = \underline{b} - \frac{a \cdot b}{a^2} \underline{a}$$

$$= \frac{1}{a^2} [ba^2 - (a \cdot b) \underline{a}] = \frac{1}{a^2} [(a \cdot a) \underline{b} - (a \cdot b) \underline{a}]$$

$$\underline{x} = \frac{1}{a^2} [(a \cdot b) \underline{a}] = \frac{(a \cdot b) \underline{a}}{a^2} \rightarrow \text{XX}$$

في مثالنا من الجزء الثاني

1] إذا كانت $A(1, 0, 1)$ ، $B(2, 3, 4)$ ، $C(-1, 1, -2)$
 أوجد المسافة من النقطة A إلى المستقيم BC
 والمسافة من النقطة B إلى المستقيم AC
 والمسافة من النقطة C إلى المستقيم AB
 الحل

المسافة من النقطة A إلى المستقيم BC هي

$$\underline{BA} \cdot \underline{\hat{BC}} = \frac{\underline{BA} \cdot \underline{BC}}{|\underline{BC}|}$$

نقسم المساحة المثلثية إلى قسمين
 1/ أثبات أن المساحة المثلثية والخطوط
 2/ أن لنوع خاص من المساحة المثلثية والخطوط
 3/ أن لنوع خاص من المساحة المثلثية والخطوط

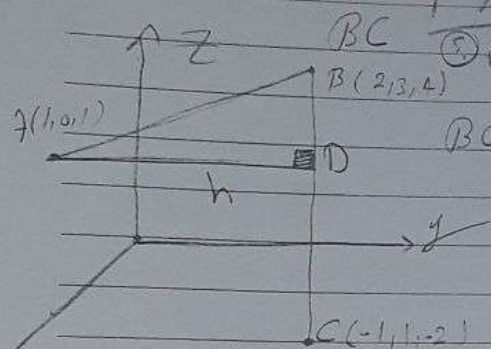
$$\underline{BA} = A - B = (-1, -3, -3), \quad \underline{BC} = C - B = (-3, -2, -4)$$

$$\underline{BA} \cdot \underline{BC} = 3 + 6 + 12 = 21$$

$$|\underline{BC}| = \sqrt{9 + 4 + 16} = 7$$

لذا فإن مسافة $\underline{BA}$ على $\underline{BC}$ هي

$$\underline{BA} \cdot \underline{BC} = \frac{21}{7} \rightarrow \textcircled{I}$$



نحتاج إلى إيجاد مسافة من النقطة A إلى المستقيم BC
 لنكون h مسافة من النقطة A إلى المستقيم BC
 هي h

$$h = \frac{|\underline{BA} \wedge \underline{BC}|}{|\underline{BC}|}$$

$$\underline{BA} = -\underline{i} - 3\underline{j} - 3\underline{k}, \quad \underline{BC} = -3\underline{i} - 2\underline{j} - 4\underline{k}$$

$$\therefore \underline{BA} \wedge \underline{BC} = \begin{vmatrix} \underline{i} & \underline{j} & \underline{k} \\ -1 & -3 & -3 \\ -3 & -2 & -4 \end{vmatrix} = 12\underline{i} + 3\underline{j} - 7\underline{k}$$

$$|\underline{BA} \wedge \underline{BC}| = \sqrt{144 + 9 + 49} = \sqrt{202}$$

$$|\underline{BC}| = 7$$

$$\therefore h = \frac{\sqrt{202}}{7}$$

لوقت الوصم
 ١- الخطوط المتقاطعة للخطوط
 ٢- السلاسل والخطوط

والله اعلم
 بالحق

مثال ١- كُتبت ثمة المتجهات $\underline{A} = (1, 1, 1)$ متعامدة $\underline{B} = (1, 0, -1)$ ، $\underline{C} = (1, -2, 1)$
 الحل

لثمة ثمة الثلاث متجهات $\underline{A}, \underline{B}, \underline{C}$ متعامدة

المتجه $\underline{C}$ عمودي على $\underline{A}, \underline{B}$ في نفس ثمة $\underline{A}$ عمودي على $\underline{B}, \underline{C}$
 وذلك $\underline{B}$ عمودي على $\underline{A}, \underline{C}$

$$\underline{A} \cdot \underline{B} = \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \end{vmatrix} = -\hat{i} + 2\hat{j} - \hat{k} = -\underline{C}$$

$$\underline{B} \cdot \underline{C} = \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ 1 & 0 & -1 \\ 1 & -2 & 1 \end{vmatrix} = -2\hat{i} - 2\hat{j} - 2\hat{k} = -2(\hat{i} + \hat{j} + \hat{k}) = -2\underline{A}$$

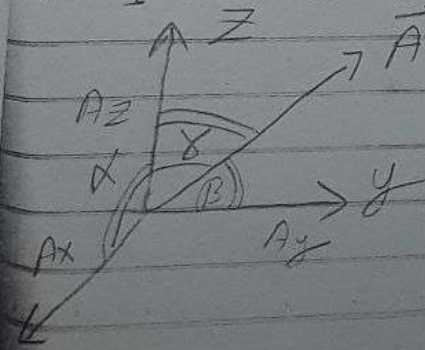
$$\underline{C} \cdot \underline{A} = \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ 1 & -2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = -3\hat{i} + 3\hat{k} = -3\underline{B}$$

إذا $\underline{C}, \underline{A} \perp \underline{B}$

وبالتالي فإن المتجهات الثلاثة متعامدة

وبالتالي فإن شرط تكامل ٣ متجهات هو أن يكون حامل المتجهات الثلاثة متعامد
 يعطى المتجه الثالث

زوايا ميل المتجه $\underline{A} = A_x \hat{i} + A_y \hat{j} + A_z \hat{k}$ مع محاور الإحداثيات
 تكون



ابج / آتوان

۱۔ عاذا کان

$$\underline{A} = 3\underline{i} + 2\underline{j} - 5\underline{k}, \underline{B} = 4\underline{i} - 3\underline{j} + \underline{k}$$

$$C = 4\underline{i} - 2\underline{j} + \underline{k}, \quad D = 3\underline{i} - 6\underline{j} + 2\underline{k}$$

-1, 0, 1

[!] طول کل من هذه المصباح ووجه المصباح في رُجاء كل منها .

$$1A.1 = \sqrt{9 + 4 + 3.6} = \boxed{7}$$

$$\hat{A} = \frac{A}{|A|} = \frac{1}{7} (3\hat{i} + 2\hat{j} - 6\hat{k})$$

$$|B| = \sqrt{16,2 + 1} = \sqrt{26}$$

$$\hat{\beta} = \frac{1}{\sqrt{26}} (4i - 3j + k)$$

$$|C| = \sqrt{16 + 4 + 1} = \sqrt{21}$$

$$\underline{\hat{C}} = \frac{1}{\sqrt{21}} (4\hat{i} - 2\hat{j} + \hat{k})$$

$$10 = 9 + 36 + 4 = 7$$

$$D = \frac{1}{7} (38 - 61 + 24)$$

C, D, A, D, A, C, A, B (5)

$$A.C = 12 - 4 - 6 = 2$$

$$A.D = 2 - 12 - 12 = -15$$

$$C_{\bullet} \textcircled{1} = 12, 12 + 2 = 26$$

سأوضح في A , B ثم في C , D

$$\Theta = 20^\circ \left(\frac{26}{1} \right)$$

"الصحيح"

$$\underline{A} \cdot \underline{B} + \underline{A} \cdot \underline{C} - \underline{A} \cdot \underline{D} \quad \text{قانون الجمع} \quad \underline{A} \cdot (\underline{B} + \underline{C} - \underline{D}) \quad [2]$$

$$\underline{A} \cdot (\underline{B} + \underline{C} - \underline{D}) = (3\hat{i} + 2\hat{j} - 6\hat{k}) \cdot (11\hat{i} - 11\hat{j} + 4\hat{k})$$

$$= 33 - 22 - 24 = \underline{-13}$$

$$\underline{A} \cdot \underline{B} + \underline{A} \cdot \underline{C} - \underline{A} \cdot \underline{D} = 0 + 2 - 15 = \underline{-13}$$

$$\underline{A} \cdot \underline{B} + \underline{A} \cdot \underline{C} - \underline{A} \cdot \underline{D} = \underline{A} \cdot (\underline{B} + \underline{C} - \underline{D})$$

$$(\underline{A} + \underline{B}) \wedge (\underline{C} + \underline{D}) \wedge (\underline{A} + \underline{B}) \cdot (\underline{C} + \underline{D}) \quad \text{ثالث} \quad [5]$$

$$(\underline{A} + \underline{B}) \cdot (\underline{C} + \underline{D}) = (7\hat{i} - \hat{j} - 5\hat{k}) \cdot (7\hat{i} - 8\hat{j} + 3\hat{k})$$

$$= 49 + 8 - 15 = \underline{42}$$

$$(\underline{A} + \underline{B}) \wedge (\underline{C} + \underline{D}) = (7\hat{i} - \hat{j} - 5\hat{k}) \wedge (7\hat{i} - 8\hat{j} + 3\hat{k})$$

$$= \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ 7 & -1 & -5 \\ 7 & -8 & 3 \end{vmatrix} = -43\hat{i} - 56\hat{j} - 48\hat{k}$$

ثالث

$$\underline{A} \wedge \underline{B} + \underline{A} \wedge \underline{C} + \underline{A} \wedge \underline{D} \wedge \underline{A} \wedge (\underline{B} + \underline{C} + \underline{D}) \quad [7]$$

$$\underline{A} \wedge (\underline{B} + \underline{C} + \underline{D}) = (3\hat{i} + 2\hat{j} - 6\hat{k}) \wedge (11\hat{i} - 11\hat{j} + 4\hat{k})$$

$$= \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ 3 & 2 & -6 \\ 11 & -11 & 4 \end{vmatrix} = -58\hat{i} - 78\hat{j} - 55\hat{k}$$

$$\underline{A} \wedge \underline{B} + \underline{A} \wedge \underline{C} + \underline{A} \wedge \underline{D} = \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ 3 & 2 & -6 \\ 4 & -3 & 1 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ 3 & 2 & -6 \\ 4 & -2 & 1 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ 3 & 2 & -6 \\ 3 & -6 & 2 \end{vmatrix}$$

$$= (-16\hat{i} - 27\hat{j} - 17\hat{k}) + (-10\hat{i} - 27\hat{j} - 14\hat{k}) + (-32\hat{i} - 24\hat{j} - 24\hat{k})$$

$$= \underline{-58\hat{i} - 78\hat{j} - 55\hat{k}}$$

المعادلة
المعكينة

$$A, B, C \text{ متجهات الوحدة المتكاملة } \begin{vmatrix} 3 & 2 & -6 \\ 4 & -3 & 1 \\ 4 & -2 & 1 \end{vmatrix} = 3(1) + 2(6) - 6(-8 + 12) = -3$$

$$|V| = 27$$

① متجه A متجه B متجه C

$$A \cdot B = \frac{A \cdot B}{|A| |B|} = \frac{-15}{7}$$

$$b = \frac{1}{\sqrt{2}} \quad , \quad a = \frac{1}{\sqrt{2}} \quad , \quad c = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

متجه a متجه b متجه c

$$a \cdot b = 0 \quad \text{متجه } a \text{ متجه } b$$

$$(2\hat{i} + \hat{j}) \cdot (\hat{i} - 2\hat{j}) = 0 \Rightarrow 2 - 2 = 0 \Rightarrow (K=1)$$

متجه a متجه b متجه c

$$\frac{2}{1} - \frac{1}{-2} \Rightarrow (K=-14)$$

متجه a متجه b متجه c

$$AB = \frac{a \cdot b}{|a| |b|} \Rightarrow \cos(\pi) = \frac{2 - 2}{\sqrt{1+4} \sqrt{4+K^2}}$$

$$\frac{1}{2} = \frac{2 - 2K}{\sqrt{5} \sqrt{4+K^2}} \Rightarrow 4 - 4K = \sqrt{5} \sqrt{4+K^2}$$

$$(4 - 4K)^2 = 5(4 + K^2) \Rightarrow 16 - 32K + 16K^2 = 20 + 5K^2$$

$$11K^2 - 32K - 4 = 0 \Rightarrow K = \frac{16 \pm 10\sqrt{3}}{11}$$

Latin Studies

$$\cos \theta = \frac{2+0}{2+2}$$

$$\boxed{\theta = 0}$$

١٠ الخواص العامة للزيت

٥٨٣٥ عو قع امك لينا الله انا

Franklin College

71

ثانياً - أثبت المتجهات $\underline{c} = 2\hat{i} - 2\hat{j} + 2\hat{k}$ و $\underline{d} = 3\hat{i} - 2\hat{j} + 5\hat{k}$ متعامداً
 وزاوية الزاوية بين المتجهات $\underline{a} = \hat{i} - 2\hat{j} + 2\hat{k}$ و $\underline{b} = \hat{i} + \hat{k}$ هي $\frac{\pi}{4}$

الحل

المتجهات $\underline{c}$ و $\underline{d}$ تكونان متعامدان إذا حققا $\underline{c} \cdot \underline{d} = 0$

$$\underline{c} \cdot \underline{d} = (2\hat{i} - 2\hat{j} + 2\hat{k}) \cdot (3\hat{i} - 2\hat{j} + 5\hat{k}) = 6 + 4 - 10 = 0$$

∴ المتجهات $\underline{c}$ و $\underline{d}$ متعامدان

$$\cos \theta = \cos(a, b) = \frac{\underline{a} \cdot \underline{b}}{|\underline{a}| |\underline{b}|} = \frac{1 + 0 + 2}{\sqrt{9} \sqrt{2}} = \frac{3}{3\sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

$$\theta = \cos^{-1}\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right) = \left[\frac{\pi}{4}\right]$$

ثالثاً - أثبت متجه المماس $\underline{a} = 3\hat{i} - \hat{j} + 2\hat{k}$ في النقطة $\underline{b} = \hat{i} + 4\hat{j} - \hat{k}$ على المستوى $\underline{r} = \hat{i} + \hat{j} + \hat{k}$

$$\underline{a} \cdot \underline{b} = \underline{a} \cdot \underline{b} = 3 - 4 - 2 = -3$$

$$|\underline{b}| = \sqrt{1 + 16 + 1} = \sqrt{18} = 3\sqrt{2}$$

ثانياً - أثبت متجه الوحدة المماس على كل من المتجهات $\underline{a} = 3\hat{i} - \hat{j} + 2\hat{k}$ و $\underline{b} = \hat{i} + 4\hat{j} - \hat{k}$

الحل

$$\underline{ab} = \underline{b} - \underline{a} = -2\hat{i} + 5\hat{j} - 3\hat{k} \Rightarrow |\underline{ab}| = \sqrt{38}$$

$$\underline{ab} = \frac{\underline{ab}}{|\underline{ab}|} = \frac{1}{\sqrt{38}} (-2\hat{i} + 5\hat{j} - 3\hat{k})$$

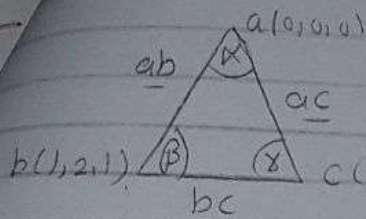
موقع OP_2

ROX

الموقع OP_1 و OP_2

ROX

استخدام المتجهات في حساب زوايا المثلث
 $a(0,0,0)$ $b(1,2,1)$ $c(-1,0,1)$



$$A = \frac{1}{2} |ab \wedge ac|$$

$$\underline{ab} = \underline{b} - \underline{a} = (1, 2, 1) \quad \underline{ac} = \underline{c} - \underline{a} = (-1, 0, 1)$$

$$\underline{ab} \wedge \underline{ac} = \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ 1 & 2 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 2\hat{i} - 2\hat{j} + 2\hat{k}$$

$$A = \frac{1}{2} |\underline{ab} \wedge \underline{ac}| = \frac{1}{2} \sqrt{4+4+4} = \frac{1}{2} \cdot 2\sqrt{3} = \sqrt{3}$$

$$\cos \alpha = \frac{\underline{ab} \cdot \underline{ac}}{|\underline{ab}| |\underline{ac}|} = \frac{(1, 2, 1) \cdot (-1, 0, 1)}{\sqrt{1+4+1} \sqrt{1+0+1}} = \frac{-1+1}{\sqrt{6} \sqrt{2}} = 0 \Rightarrow \alpha = \cos^{-1}(0) = \frac{\pi}{2} \quad (I)$$

$$\cos \beta = \frac{\underline{ab} \cdot \underline{bc}}{|\underline{ab}| |\underline{bc}|} \quad \cos \gamma = \frac{\underline{bc} \cdot \underline{ac}}{|\underline{bc}| |\underline{ac}|}$$

(II) نريد المتجه $\underline{x}$ الذي يربط كل من المتجهات $\underline{a}$ و $\underline{b}$ و $\underline{c}$
 $\underline{a} \cdot \underline{x} = \underline{b}$ و $\underline{a} \cdot \underline{x} = \underline{c}$

$$\underline{x} = \frac{\underline{c}}{a^2} \underline{a} + \frac{\underline{b} \wedge \underline{a}}{a^2}$$

$$\underline{a} \cdot \underline{x} = \underline{b} \quad (1)$$

$$(\underline{a} \cdot \underline{x}) \underline{a} = \underline{b} \underline{a}$$

$$(\underline{a} \cdot \underline{a}) \underline{x} - (\underline{x} \cdot \underline{a}) \underline{a} = \underline{b} \underline{a}$$

$$a^2 \underline{x} - \underline{c} \underline{a} = \underline{b} \underline{a}$$

$$\underline{x} = \frac{\underline{b} \underline{a}}{a^2} + \underline{c} \frac{\underline{a}}{a^2}$$

التكويين من (1), (2) و (3) (1)

(i) $[a_n(bnc)]nc = (a,c)(bnc)$

$bnc = E$

الحل

نفرض أن

L.H.S = $(a_n E)nc = (a,c)E - (E,c)a$

= $(a,c)(bnc) - ((bnc),c)a$

مضروب المتجهات القياسية

∴ L.H.S = $(a,c)(bnc) = R.H.S$

والجواب

(ii) $[a_nb]n(cnd) = [a,b,d]c - [a,b,c]d$

الحل

let $E = (a_nb)$

∴ L.H.S = $E_n(cnd) = (E,d)c - (E,c)d$

= $[(a_nb),d]c - [(a_nb),c]d$

= $[a,b,d]c - [a,b,c]d = R.H.S$

(9) ثوبه متجه للوضع للتفليتي (2, -2, 1) ، (1, 1, 1) ثم ثبت كل منهما في
المحور $a = a \hat{e}$

الحل

$P_2(1, 1, 1)$

$P_1(2, -2, 1)$

نفرض أن

إذا متجه موضع P_1 هو $r_1 = 2\hat{i} - 2\hat{j} + \hat{k}$ و متجه موضع P_2 هو $r_2 = \hat{i} + \hat{j} + \hat{k}$

20X

$$|r_1| = \sqrt{4+4+1} = \sqrt{9} \Rightarrow \hat{r}_1 = \frac{r_1}{|r_1|} = \frac{1}{3} (2\hat{i} - 2\hat{j} + \hat{k})$$

$$|r_2| = \sqrt{1+1+1} = \sqrt{3}$$

$$\hat{r}_2 = \frac{r_2}{|r_2|} = \frac{1}{\sqrt{3}} (\hat{i} + \hat{j} + \hat{k})$$

(14) إذا تم تعريف المتجهات $\underline{a}^*$, $\underline{b}^*$, $\underline{c}^*$ بدلالة المتجهات

$$\underline{a}^* = \frac{\underline{b} \wedge \underline{c}}{[\underline{a}, \underline{b}, \underline{c}]}, \quad \underline{b}^* = \frac{\underline{c} \wedge \underline{a}}{[\underline{a}, \underline{b}, \underline{c}]}, \quad \underline{c}^* = \frac{\underline{a} \wedge \underline{b}}{[\underline{a}, \underline{b}, \underline{c}]}$$

$$[\underline{a}^*, \underline{b}^*, \underline{c}^*] = \frac{1}{[\underline{a}, \underline{b}, \underline{c}]} \quad \text{ثابت - 1}$$

الحل

$$L.H.S = [\underline{a}^*, \underline{b}^*, \underline{c}^*] = \underline{a} \cdot (\underline{b} \wedge \underline{c})$$

$$= \frac{\underline{b} \wedge \underline{c}}{[\underline{a}, \underline{b}, \underline{c}]} \cdot \left\{ \frac{\underline{c} \wedge \underline{a}}{[\underline{a}, \underline{b}, \underline{c}]} \wedge \frac{\underline{a} \wedge \underline{b}}{[\underline{a}, \underline{b}, \underline{c}]} \right\}$$

$$= \frac{1}{[\underline{a}, \underline{b}, \underline{c}]^3} \{ (\underline{b} \wedge \underline{c}) \cdot [(\underline{c} \wedge \underline{a}) \wedge (\underline{a} \wedge \underline{b})] \}$$

let that $\underline{E} = \underline{c} \wedge \underline{a}$

$$L.H.S = \frac{1}{[\underline{a}, \underline{b}, \underline{c}]^3} \{ (\underline{b} \wedge \underline{c}) \cdot (\underline{E} \wedge (\underline{a} \wedge \underline{b})) \}$$

$$= \frac{1}{[\underline{a}, \underline{b}, \underline{c}]^3} \{ (\underline{b} \wedge \underline{c}) \cdot [(\underline{E} \cdot \underline{b}) \underline{a} - (\underline{E} \cdot \underline{a}) \underline{b}] \}$$

$$L.H.S = \frac{1}{[a, b, c]^3} \{ (b \wedge c) \cdot [(c \wedge a) \cdot b] a - ((c \wedge a) \cdot b) a \}$$

$$= \frac{1}{[a, b, c]^3} \{ (b \wedge c) \cdot [(c \wedge a) \cdot b] a \}$$

$$= \frac{1}{[a, b, c]^3} \{ (b \wedge c) \cdot [a, b, c] a \}$$

$$= \frac{(b \wedge c) \cdot a}{[a, b, c]^2} = \frac{a \cdot (b \wedge c)}{[a, b, c]^2} = \frac{[a, b, c]}{[a, b, c]^2}$$

$$= \frac{1}{[a, b, c]} = R.H.S$$

(ج) إذا تم تعريف المتجه $\vec{U}$ بـ a, b, c بالعلاقة

$$\vec{U} = \lambda \vec{a} + \mu \vec{b} + \gamma \vec{c} \quad (1)$$

$$\lambda = \vec{U} \cdot \vec{a}^*, \quad \mu = \vec{U} \cdot \vec{b}^*, \quad \gamma = \vec{U} \cdot \vec{c}^*$$

$$\Rightarrow \lambda = \vec{U} \cdot \vec{a}^* \quad (?)$$

بفرض (1) قياسياً مع المتجه $\vec{a}^*$

$$\therefore \vec{U} \cdot \vec{a}^* = (\lambda \vec{a} + \mu \vec{b} + \gamma \vec{c}) \cdot \vec{a}^* ; \vec{a}^* = \frac{b \wedge c}{[a, b, c]}$$

$$\therefore \vec{U} \cdot \vec{a}^* = \lambda \vec{a} \cdot \vec{a}^* + \mu \vec{b} \cdot \vec{a}^* + \gamma \vec{c} \cdot \vec{a}^*$$

$$\vec{U} \cdot \vec{a}^* = \lambda \vec{a} \cdot \frac{b \wedge c}{[a, b, c]} + \mu \vec{b} \cdot \frac{b \wedge a}{[a, b, c]} + \gamma \vec{c} \cdot \frac{b \wedge c}{[a, b, c]}$$

$$= \frac{1}{[a, b, c]} [\lambda \vec{a} \cdot (b \wedge c) + \mu \vec{b} \cdot (b \wedge a) + \gamma \vec{c} \cdot (b \wedge c)]$$

$$\vec{U} \cdot \vec{a}^* = \frac{1}{[a, b, c]} \lambda [a, b, c] = \lambda = R.H.S$$

بسم الله الرحمن الرحيم

$$\mu = \underline{v} \cdot \underline{b}^* , \quad \chi = \underline{v} \cdot \underline{c}^* \quad (\text{واجب})$$

ثم انتكاه من الباب النور بتأريته

"الحمد لله"

والسلامة من كل

أثبت صحة متباينة لاجانج

$$|\vec{A} \times \vec{B}|^2 + |\vec{A} \cdot \vec{B}|^2 = A^2 B^2$$

الاثبات

$$\text{L.H.S} = |\vec{A} \times \vec{B}|^2 + |\vec{A} \cdot \vec{B}|^2 = |AB \sin \theta \hat{n}|^2 + |AB \cos \theta|^2$$

$$= A^2 B^2 \sin^2 \theta + A^2 B^2 \cos^2 \theta$$

$$= A^2 B^2 (\sin^2 \theta + \cos^2 \theta) = A^2 B^2 = \text{R.H.S}$$

□

د. باسم ذلك الوقت الرصم

الوقت الرصم

الباب الثاني

مشتقات القوة في الفراغ

القوة: كمية طبيعية تعمل على تغير الجسم من مكانه أو حركته.
وهي من الكميات المتجهة وبغير عادة عنها بالمتجه $\vec{F}$.

ويكتب متجه القوة في الصورة (الثابتة):
 $\vec{F} = F \hat{F} = F_x \hat{i} + F_y \hat{j} + F_z \hat{k}$

المتجه - معياره: متجه الوحدة في اتجاهه
(مركبة القوة محور x في متجه الوحدة في اتجاهه، مركبة القوة محور y في متجه الوحدة في اتجاهه، مركبة القوة محور z في متجه الوحدة في اتجاهه).

* وحدة القوة ← النيوتن N .

مثال (1) عيت متجه القوة $F = 13N$ وإذا ما أثرت في الخلال المستقيم التي يميل
إلى النقطة $A_1(4, -2, 6)$ إلى النقطة $A_2(8, 1, -6)$.

الحل

يكتبنا المتجه عيت متجه القوة في الصورة

$$\vec{F} = F \hat{F} = 13 \hat{F} \quad (?) \rightarrow ①$$

$$\hat{F} = \frac{\underline{A_1 A_2}}{|A_1 A_2|}$$

$$\underline{A_1 A_2} = A_2 - A_1 = (8, 1, -6) - (4, -2, 6) = 4\hat{i} + 3\hat{j} - 12\hat{k}$$

$$|A_1 A_2| = \sqrt{16 + 9 + 144} = 13$$

$$\hat{F} = \frac{1}{13} (4\hat{i} + 3\hat{j} - 12\hat{k}) \rightarrow ②$$

$$\vec{F} = (4\hat{i} + 3\hat{j} - 12\hat{k})$$

من ① و ②
متجه القوة يكون

ROX

نظام لآلة الرفع

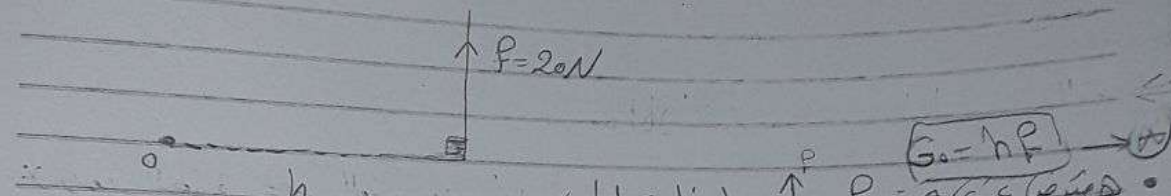
المرحلة الأولى
المرحلة الثانية

عمل القوة

(عزم القوة)

ثمة العزم τ (؟) وذاك ناشئ عن الجسم (؟) فالك العزم يتأثير على الجسم بخلق الجسم يدور (يلف) لكن القوة تؤثر على الجسم ~~عزم القوة~~ بخلق الجسم يدور أو يسكن.

• العزم = حاصل ضرب القوة $\times$ ذراع العمود



• ههنا عزم قوة F وذا فاعلمها $G = hF$

وذا عازمة عزم حول نقطة وليكن ه

فأنا لو عازمة عزم بواجب القوة من حول ه (يعني عازمة القوة من حول ه)

فيسقط عمود من ه على خط عمل القوة فهدنا

مسافة عمودية وليكن $h = 3m$

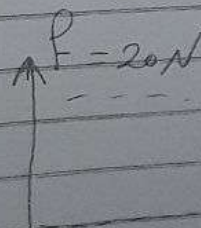
$\therefore G = Fh = (20)(3) = (60) \text{ N.m}$

طالب هل فاعلمنا كذا (؟) لاء العزم بفرق اتجاه العزم دا هل مع عقارب الساعة وركب عقارب الساعة.

ههنا القلم دا يمثل القوة وهدنا كذا على خط عمل القوة وأنا عشان نعمل دوران لما هصور كذا $\uparrow$ لدا هصور كذا $\uparrow$ طالب

ذا هصور ذاتي كذا كذا فالك ينقل الزاوية الزمعة وبالتالي هتدور في الحالة دي ذن اتجاه العزم ضد عقارب الساعة وبالتالي هتدور $\oplus$

العزم حول ه هو $G = 60 \text{ N.m}$



عازمة العزم حول ه (؟)

$$G = Fh = (20)(3) = 60$$

وليكن تدور مع عقارب الساعة

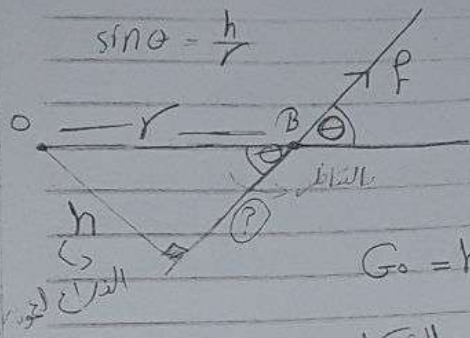
$$\therefore G = -60 \text{ N.m}$$

يسمى ذلك العزم العزم

وهنا موضوعنا بقا يسكن عن أننا قد حسب العزم عن طريق المسجحات . فالحال عينا ٣ أنواع من العزم

العزم حول نقطة التماس
العزم حول نقطة
العزم حول محور

أ) العزم حول نقطة التماس
هنا نرى أن قوة P والقوة P يمر بنقطة B ونسقط العزم حول نقطة التماس O أيضا قولنا العزم = حاصل ضرب القوة $\times$ ذراعها (طول العمود النازل من النقطة على خط عمل القوة) h ونسقط h ونسقط h ونسقط h



$$\sin \theta = \frac{h}{r}$$

$$G_o = h P = (r \sin \theta) (P) = r P \sin \theta$$

ب) كتابة العزم في الصورة المتجهية بالشكل
 $G_o = r \times P \Rightarrow r = ? \Rightarrow G_o = r \times P$

$$r_{Bo} = r_B - r_o = r_B$$

$$\therefore G_o = r_B \times P \Rightarrow G_o = \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ x & y & z \\ P_x & P_y & P_z \end{vmatrix}$$

مثال ١: إذا كانت $P = 2\hat{i} + \hat{j} - 3\hat{k}$ ونقطة التماس $A(1, 3, 5)$ فاحسب العزم حول نقطة التماس O

$$P = 2\hat{i} + \hat{j} - 3\hat{k}$$

$$G_o = r_A \times P = (\hat{i} + 3\hat{j} + 5\hat{k}) \times (2\hat{i} + \hat{j} - 3\hat{k})$$

$$= \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ 1 & 3 & 5 \\ 2 & 1 & -3 \end{vmatrix} = -14\hat{i} + 13\hat{j} - 5\hat{k}$$

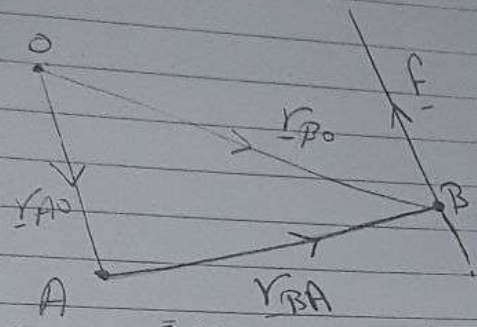
نفس ذلك ولكن الوترين

نفسه موقع نقطة ما $r_{no} = r_n - r_o = r_n$
 الزم حول نقطة

$r_A = r_B - r_A$
 $r_B = r_B - A$

لو عشنا القوة F والنقطة B على خط حمل القوة وعاور الزم حول نقطة ما وليكن A

(الترميز)



$G_A = r_{BA} \wedge F$

$r_{BA} = r_B - r_A$

r_{BA} النقطة التي نمر بها القوة
 وبها النقطة التي نقيس حولها الزم

طالب r_A ، r_B دول فاصهم r_A ؟ لو كنا مثلا حيث عملت هنا كما ه السهم نقطة الزم . يبقى دى كمانته الموقع A بالنسبة لنقطة الأصل ، r_B متجه موقع B بالنسبة لنقطة الأصل .

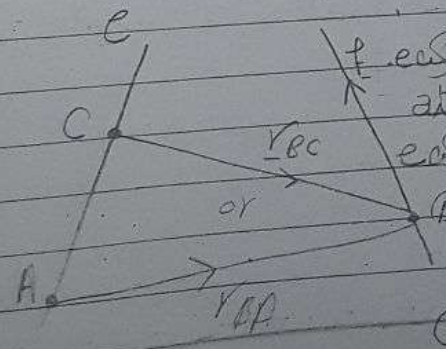
لو بررو حيث وأضرب معاها خواص الجمع المتكافئ

$r_A + r_{BA} = r_B \Rightarrow r_{BA} = r_B - r_A$

مجموع داتنا ه متكافئ بقاى داتنا فى اتجاه دورى واحد = الاتجاه الثالث

$G_A = r_{BA} \wedge F$

الزم حول محور



نضرب من أنواع الزم هو الزم حول محور ونكتبه F ونفسه عند قوة القوة دى زسما F ونحطانقطة على خط حمل القوة وليكن B وعشنا محور ونكتبه هتفرق من المور E دايقع عليه نقطتين C, A .
 فلو كنا عاورة زحم الزم حول المحور E هتكون عبارة عن

$G_E = \hat{e} \cdot G_A$

or $r = \hat{e} \cdot r$

حيث $\hat{e}$ هو متجه الوحدة للصور e حيث $\hat{e} = \frac{e}{|e|}$

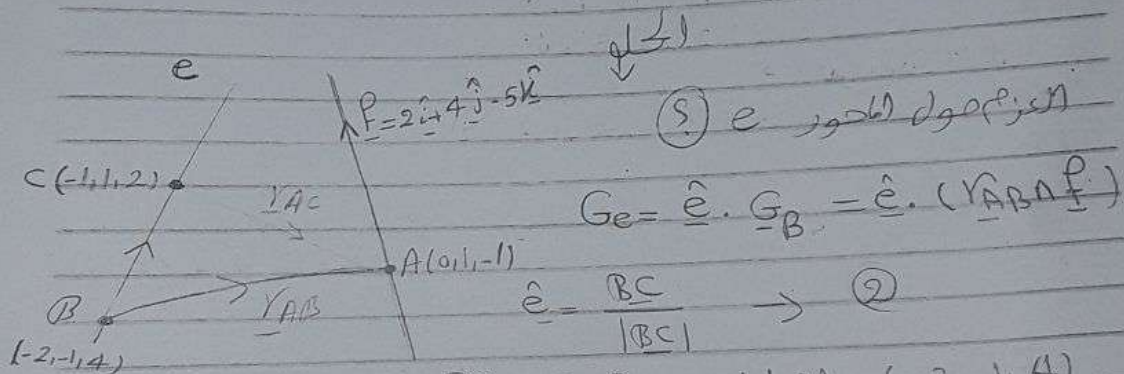
وبالتالي فإن العزم حول محور ما = حاصل الضرب المتبادلي لمتجه الوحدة للصور والعزم حول أي نقطة تقع على المحور.

لتحليل $\hat{e}$ العزم حول محور ينتج كمية متبادلة وليست متبادلة لأن الضرب يكون قياسي.

$$G_e = \hat{e} \cdot G_A = \hat{e} \cdot (r_{BA} \times F) = \text{مصدر}$$

ملحوظة: - وإذا كان العزم حول المحور سالباً فهذا يعني أن متجه الوحدة مأخوذ في الاتجاه المعاكس.

مثال: ذراع عزم القوة $P = 2\hat{i} + 4\hat{j} - 5\hat{k}$ والبرقعة بالنقطة $(0, 1, -1)$ حول محور المستقيم المار بالنقطتين $(-1, 1, 2)$ ، $(-2, -1, 4)$



$$BC = C - B = (-1, 1, 2) - (-2, -1, 4)$$

$$\therefore BC = (1, 2, -2) \rightarrow |BC| = \sqrt{1+4+4} = (3)$$

into ② $\therefore \hat{e} = \frac{1}{3} (\hat{i} + 2\hat{j} - 2\hat{k}) \rightarrow (3)$

$$\therefore G_e = \begin{vmatrix} 1 & 2 & -2 \\ 3 & 3 & 3 \\ 2 & 2 & -5 \end{vmatrix} = \frac{1}{3} (-10 + 20) + \frac{2}{3} (-10 + 10) - \frac{2}{3} (8 - 4)$$

$$= \sqrt{\frac{2}{3}}$$

ولو عينا المحور هو النقطة C

$$\therefore G_c = \hat{e} \cdot G_c = \hat{e} \cdot (r_{AC} \wedge F)$$

$$r_{AC} = r_A - r_C = (1, 0, -3)$$

$$\therefore G_c = \begin{vmatrix} 1 & 2 & -2 \\ 3 & 3 & -3 \\ 1 & 0 & -3 \\ 2 & 4 & -5 \end{vmatrix} = \frac{1}{3}(12) + \frac{2}{3}(-6+5) - \frac{2}{3}(4) = \frac{2}{3}$$

مثال

عالم 1 كلف $F = 3\hat{i} - 2\hat{j} + \hat{k}$ ونقطة بالنقطة $(1, 2, 1)$ حول

(1) نقطة الأصل

(2) النقطة $(1, 2, 2)$

(3) المحور $\hat{k}$ ونقطة الأصل

(4) حول محور الموازي لـ $\hat{e}$

الحل

(1) الزخم حول نقطة الأصل

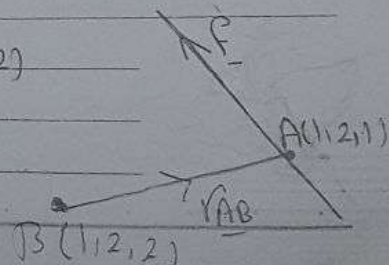
$$F = 3\hat{i} - 2\hat{j} + \hat{k} \quad \text{let } A = (1, 2, 1) \Rightarrow r_A = \hat{i} + 2\hat{j} + \hat{k}$$

$$\therefore G_o = r_A \wedge F = \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ 1 & 2 & 1 \\ 3 & -2 & 1 \end{vmatrix} = 4\hat{i} + 2\hat{j} - 8\hat{k} \rightarrow (*)$$

(2) الزخم حول النقطة $B(1, 2, 2)$

$$r_{AB} = r_A - r_B = (1, 2, 1) - (1, 2, 2) = (0, 0, -1)$$

$$\therefore G_B = r_{AB} \wedge F$$



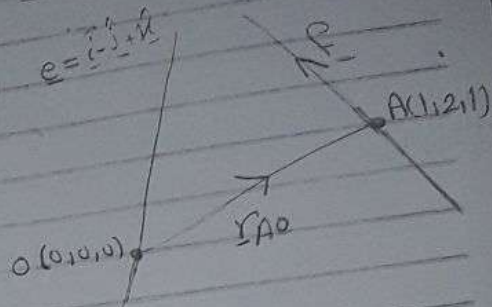
$$\therefore \underline{G}_B = \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ 0 & 0 & -1 \\ 3 & -2 & 1 \end{vmatrix} = \boxed{-2\hat{i} - 3\hat{j}} \rightarrow \#$$

(٣) المصير $\underline{e} = \hat{i} - \hat{j} + \hat{k}$ ونكرينقله الأصل

$$\underline{G}_e = \underline{\hat{e}} \cdot \underline{G}_0 = \underline{\hat{e}} \cdot (\underline{r}_A \wedge \underline{r}_P)$$

$$\therefore \underline{G}_e = \underline{\hat{e}} \cdot (\underline{r}_A \wedge \underline{r}_P)$$

$$\underline{\hat{e}} = \frac{\underline{e}}{|\underline{e}|} = \frac{\hat{i} - \hat{j} + \hat{k}}{\sqrt{1+1+1}} = \frac{1}{\sqrt{3}} (\hat{i} - \hat{j} + \hat{k})$$



$$\underline{r}_A = (1, 2, 1)$$

$$\therefore \underline{G}_e = \begin{vmatrix} \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{-1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \\ 1 & 2 & 1 \\ 3 & -2 & 1 \end{vmatrix} = \boxed{-2\sqrt{3}} \rightarrow \textcircled{A}$$

والشارة السالبة تعني أن متجه الوحدة مأخوذ في الاتجاه المعاكس.

(٤) العزم حول محاور الإحداثيات

$$\underline{G}_x, \underline{G}_y, \underline{G}_z$$

$$\underline{\hat{e}}_x \text{ (متجه الوحدة في الاتجاه } x) = \hat{i}, \quad \underline{\hat{e}}_y = \hat{j}, \quad \underline{\hat{e}}_z = \hat{k}$$

$$\therefore \underline{G}_x = \underline{\hat{e}}_x \cdot \underline{G}_0 = \hat{i} \cdot (4\hat{i} + 2\hat{j} - 8\hat{k}) = \boxed{4}$$

$$\underline{G}_y = \underline{\hat{e}}_y \cdot \underline{G}_0 = \hat{j} \cdot (4\hat{i} + 2\hat{j} - 8\hat{k}) = \boxed{2}$$

$$\underline{G}_z = \underline{\hat{e}}_z \cdot \underline{G}_0 = \hat{k} \cdot (4\hat{i} + 2\hat{j} - 8\hat{k}) = \boxed{-8}$$



المتجه
الوحدة
في الاتجاه

زخم

العزم حول المحاور
الإحداثيات

$$\text{let } (0, 1, 0) \rightarrow \hat{k}$$

مربع القوة مقدارها 10 تواتر النقطتين الموصيتين لمربع $\hat{x}$ ومربع
النقطة $(0, 1, 0)$ توجد مقدار عزم هذه القوة حول محور يمر
بنقطتي التماس وتواتر النقطتين $\hat{i} - 2\hat{j} - \hat{k}$

الحل
ب- القوة تواتر محور $\hat{x}$ الموصيت فيكون
 $\vec{F} = 10\hat{i}$

ونصت أن الصور $\vec{e}$ تواتر النقطتين $2\hat{i} - 2\hat{j} - \hat{k}$

$$\hat{e} = \frac{2\hat{i} - 2\hat{j} - \hat{k}}{\sqrt{4+4+1}} = \frac{1}{3} (2\hat{i} - 2\hat{j} - \hat{k})$$

$$\therefore G_e = \hat{e} \cdot \vec{M}_e = \hat{e} \cdot (\vec{r}_e \wedge \vec{F}) = \hat{e} \cdot (\vec{r}_e \wedge \vec{F})$$

$$= \begin{vmatrix} \frac{2}{3} & -\frac{2}{3} & -\frac{1}{3} \\ 0 & 1 & 0 \\ 10 & 0 & 0 \end{vmatrix} = -\frac{1}{3} (-10) = \frac{10}{3}$$

ضع علامة $(\checkmark)$ أو (X) .
سؤال أمتحان: إذا أثبتت القوة $\vec{F}_1 = 5N$ من النقطة $(3, 4, 0)$ إلى النقطة
 $(0, 4, 4)$ والقوة $\vec{F}_2$ في النقطة $(0, 0, 4)$ وكانت محملتها $(3\hat{i} + 8\hat{j} + 4\hat{k})$

(P) مقدار القوة $\vec{F}_2 = 15N$ (X)
(ب) متجه القوة $\vec{F}_2$ هو $\vec{F}_2 = 6\hat{i} + 8\hat{j}$ (✓)
(ج) عزم القوة $\vec{F}_1$ حول نقطة التماس هو $\vec{M}_1 = 16\hat{i} - 12\hat{j} + 12\hat{k}$
(د) عزم القوة $\vec{F}_2$ حول نقطة التماس هو $\vec{M}_2 = -32\hat{i} + 24\hat{j}$ (✓)

الحل
القوة $\vec{F}_1$ تواتر النقطتين AB من $A(3, 4, 0)$ إلى $B(0, 4, 4)$
متجه القوة هو $\vec{F}_1 = \frac{\vec{AB}}{|\vec{AB}|} = \frac{\vec{B} - \vec{A}}{|\vec{B} - \vec{A}|} = \frac{-3\hat{i} + 4\hat{k}}{\sqrt{9+16}} = \frac{1}{5}(-3\hat{i} + 4\hat{k})$

$$\therefore \vec{F}_1 = -3\hat{i} + 4\hat{k}$$

$$\text{Since } \vec{F} = \vec{F}_1 + \vec{F}_2 \rightarrow \therefore \vec{F}_2 = \vec{F} - \vec{F}_1$$

$$\therefore \vec{F}_2 = (3\hat{i} + 8\hat{j} + 4\hat{k}) - (-3\hat{i} + 4\hat{k}) = 6\hat{i} + 8\hat{j} \rightarrow (X)$$

(ب) مقدار القوة

$$P_2 = \sqrt{36 + 64} = 10 \text{ N} \rightarrow (*)$$

• عزم القوة P_1 حول نقطة الأصل هو

$$\underline{M}_0 = \underline{r}_A \wedge \underline{P}_1 = (3, 4, 0) \wedge (-3, 0, 4) = \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ 3 & 4 & 0 \\ -3 & 0 & 4 \end{vmatrix}$$

$$= 16\hat{i} - 12\hat{j} + 12\hat{k} \rightarrow (*)$$

• عزم القوة P_2 حول نقطة الأصل هو

$$\underline{M}_0 = \underline{r}_{(0,0,4)} \wedge \underline{P}_2 = (0, 0, 4) \wedge (6, 8, 0) = \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ 0 & 0 & 4 \\ 6 & 8 & 0 \end{vmatrix}$$

$$= -32\hat{i} + 24\hat{j} \rightarrow (*)$$

تمرين ١: أختزل مجموعة القوى الثلاثة عند بداية الإحداثيات والنقطة $(6, 6, 0)$ وخطوة من ثمة الكمية $\underline{F}$ حيث $(\underline{P}, \underline{G})$ متجهي المجموعة الرئيسية لا يتغير بالمشية للمركزين.

(i) القوة $2\hat{i} - 5\hat{j}$ والتي تؤثر في النقطة $(0, 6, 0)$

(ii) القوة $4\hat{i} - 6\hat{j}$ والتي تؤثر في النقطة $(6, 6, 6)$

(iii) القوة $7\hat{k} - 3\hat{i}$ والتي تؤثر في النقطة $(6, 0, 0)$

الحل:

المعطيات

أولاً: بالمشية لبداية الإحداثيات:

$$\underline{F} = \underline{P}_1 + \underline{P}_2 + \underline{P}_3 = (5\hat{i} - 2\hat{j}) + (4\hat{j} - 6\hat{k}) + (7\hat{k} - 3\hat{i})$$

$$= 2\hat{i} + 2\hat{j} + \hat{k} \rightarrow \textcircled{1}$$

القوة المحصلة:

لتكيس محصلة الزوايا عند بداية الإحداثيات $(0, 0, 0)$

$$\underline{M}_0 = \underline{r}_1 \wedge \underline{P}_1 + \underline{r}_2 \wedge \underline{P}_2 + \underline{r}_3 \wedge \underline{P}_3$$

$$= \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ 0 & 6 & 0 \\ 5 & -2 & 0 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ 6 & 6 & 6 \\ 0 & 4 & -6 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ 6 & 0 & 0 \\ -3 & 0 & 7 \end{vmatrix}$$

$$= -30\hat{k} - 60\hat{i} + 36\hat{j} + 24\hat{k} - 42\hat{j} = (-60\hat{i} - 6\hat{j} - 6\hat{k})$$

← بالنسبة للنقطة $(6, 6, 0)$.

المعادلة (1) لا تتأثر بالخطوة

الزخم هو القوة المضادة $\sigma' = 16,6,01$

$$(5, 6, 6) - (6, 5, 0) = (0, 0, 6)$$

$$(0,0,0) - (6,6,0) = (0,-6,0)$$

$$20 \text{ A F}_2 + \text{V}_{30} \text{ A F}_5$$

$$-42i - 18k = \sqrt{-66i^2 - 6k^2}$$

$$2\hat{j} + \hat{k} \cdot (-66 - 6\hat{k})$$

$$b = \sqrt{-138} \rightarrow \text{X X}$$

هو الله في (**) (x)

1000

زعم

(C-2) (K-1) - C
A-11 A-12 A-13

Handwritten text on a separate piece of paper, partially visible at the bottom left corner of the page.

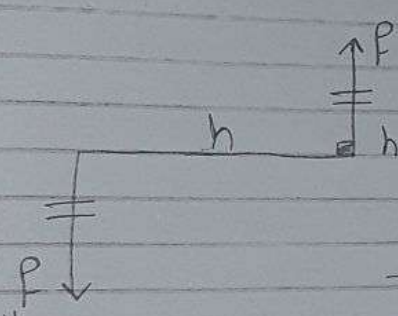
خاصة الزوايا
التي...

الزوايا...

ملصوقة خاصة جدًا: العزم P لقوة حول نقطة نعلم إذا كانت القوة تمر بالنقطة التي ينصب عندها العزم. القوة التي ينصب عندها العزم القوة بتمر بها $G=0$.

« الزدواج »

الزدواج عبارة عن قوتين متساويتان في المقدار ومتضادتان في الاتجاه ومتوازيتان وليس على خط عمل واحد.



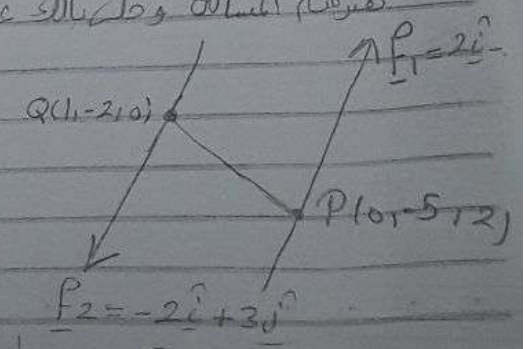
ويعرف مقدار عزم الزدواج على أنه حاصل ضرب مقادير القوتين P في المسافة العمودية h بينهما.

$$M = Ph \rightarrow (*)$$

مقدار عزم الزدواج بحسب المعادلة.

عشان نحسب الزدواج: بنجيب مجموع العزم حول كل نقطة عنيت لك وفي الآخر بتلك قيم متساوية. في المجموعة تكون الزدواج إذا كان مجموع عزم القوة حول كل نقطة متساويين. تعريفاً: القوتان $F_1 = 2\hat{i} - 3\hat{j}$ و $F_2 = -2\hat{i} + 3\hat{j}$ في النقطتين $Q(1, -2, 5)$ و $P(10, -5, 2)$ ثمة ثقت أن القوتين يكونان (زدواج) مقدار واتجاه حول النقطة Q هذا الزدواج.

الحل: هنرسم المسألة ونذكر بالذات عشان بقولنا زدواج فهنخط الخط بين القوتين متوازيتان.



الزخم حول نقطة Q .

$$M_Q = 0 + r_{PQ} \wedge F_1$$

$$r_{PQ} = r_P - r_Q = (10, -5, 2) - (1, -2, 5) = (9, -3, -3)$$

$$M_Q = \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ 9 & -3 & -3 \\ 2 & -3 & 0 \end{vmatrix} = (6\hat{i} + 4\hat{j} + 9\hat{k}) \rightarrow (1)$$

مجموع مربعات الانحراف

$$\overline{MP} = \overline{MQ} \quad (?)$$

$$\overline{MP} = 0 + \overline{MP} \cdot \overline{MP} \Rightarrow \overline{MP} = \overline{MP} \cdot \overline{MP} = (1, 3)$$

$$\overline{MP} = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 2 \\ -2 & 3 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6i + 4j + 9k \end{bmatrix} \rightarrow (2)$$

مع (1) في (2)

$$\overline{MP} = \overline{MQ}$$

في المجموع تكون مربعات

$$|\overline{MP}| = \sqrt{36 + 16 + 81} = \sqrt{133} \quad \text{أو} \quad \sqrt{11.53}$$

$$\cos \alpha = \frac{\overline{MP}}{|\overline{MP}|} = \frac{6}{\sqrt{133}} \Rightarrow \alpha = \cos^{-1} \left(\frac{6}{\sqrt{133}} \right)$$

$$\cos \beta = \frac{\overline{MP}}{|\overline{MP}|} = \frac{4}{\sqrt{133}} \Rightarrow \beta = \cos^{-1} \left(\frac{4}{\sqrt{133}} \right)$$

$$\cos \gamma = \frac{\overline{MP}}{|\overline{MP}|} = \frac{9}{\sqrt{133}} \Rightarrow \gamma = \cos^{-1} \left(\frac{9}{\sqrt{133}} \right)$$

شكرًا

20X

مجموع مربعات الانحراف

مثال : قوتان $\vec{F}_1 = 2\vec{i} + 2\vec{j} - \vec{k}$ و $\vec{F}_2 = 2\vec{i} - 3\vec{k}$ في النقطة $P_1(2, -2, 1)$ ونقلناهما الى النقطة $P_2(2, 2, 3)$ ونأخذ الاتجاه عند النقطة $P_1(1, 1, 1)$

$P_2(2, 2, 3)$

(نقل)

$$\vec{r}_{P_1} = 2\vec{i} + 2\vec{j} - \vec{k}$$

في اتجاه القوة :

$$\vec{F} = \vec{F}_1 + \vec{F}_2$$

$P_1(2, -2, 1)$

$$\therefore \vec{F} = (2\vec{i} + 2\vec{j} - \vec{k}) + (2\vec{i} - 3\vec{k})$$

$$\therefore \vec{F} = 4\vec{i} + 2\vec{j} - 4\vec{k} \rightarrow D$$

$$\underline{M}_P = \underline{r}_{P_2P} \wedge \underline{F}_2 + \underline{r}_{P_1P} \wedge \underline{F}_1$$

$$\underline{r}_{P_2P} = \underline{r}_P - \underline{r}_{P_2} = (1, 1, 2) \quad \underline{r}_{P_1P} = \underline{r}_P - \underline{r}_{P_1} = (1, -3, 0)$$

$$\underline{M}_P = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & 1 & 2 \\ 2 & 0 & -3 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & -3 & 0 \\ 2 & 2 & -1 \end{vmatrix} = (1-3)\vec{i} + 7\vec{j} - 2\vec{k} + (3\vec{i} + \vec{j} + 8\vec{k})$$

$$\therefore \underline{M}_P = 8\vec{i} + 8\vec{k}$$

نلاحظ ان القوة الكلية هي $\vec{F}$ المكونة من $\vec{F}_1$ و $\vec{F}_2$ ونلاحظ ان $\vec{F}$ هي القوة الكلية

نلاحظ ان $\vec{F}$ هي القوة الكلية

ونلاحظ ان $\vec{F}$ هي القوة الكلية

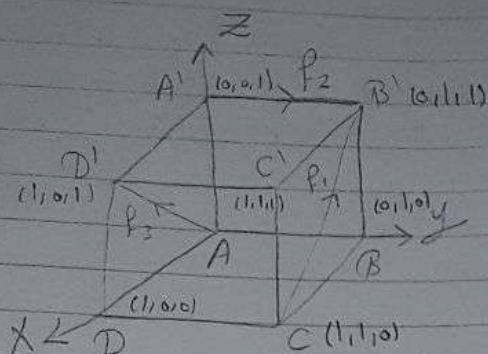
$$\underline{P} = \underline{F} \cdot \underline{M}$$

ونلاحظ ان $\vec{F}$ هي القوة الكلية

$$\underline{M}_P = \underline{r}_{P_2P} \wedge \underline{F}_2 + \underline{r}_{P_1P} \wedge \underline{F}_1$$

$$\underline{M}_P = \underline{r}_{P_2P} \wedge \underline{F}_2 + \underline{r}_{P_1P} \wedge \underline{F}_1$$

$$\underline{M}_P = \underline{r}_{P_2P} \wedge \underline{F}_2 + \underline{r}_{P_1P} \wedge \underline{F}_1$$



في القوة الولية في الشبكة الرب :-
 حيث أن طول ضلع المكعب يساوي الوحدة
 $P_1 = 3\sqrt{2}$, $P_2 = 2$, $P_3 = 2\sqrt{2}$

لإيجاد القوة مخرصة نقطة $\downarrow$ نقطة : نستخدم القانون :
 $\underline{P}_1 = P_1 \underline{\hat{P}}_1$

$$\Rightarrow \underline{\hat{P}}_1 = \frac{\underline{CB'}}{|\underline{CB'}|} = \frac{\underline{B'} - \underline{C}}{|\underline{CB'}|} = \frac{(-1, 0, 1)}{\sqrt{2}}$$

$$\therefore \underline{P}_1 = 3\sqrt{2} \cdot \frac{1}{\sqrt{2}} (-\underline{\hat{i}} + \underline{\hat{k}}) = \underline{-3\hat{i} + 3\hat{k}}$$

$$\underline{P}_2 = P_2 \underline{\hat{P}}_2 \Rightarrow \underline{\hat{P}}_2 = \frac{\underline{AB'}}{|\underline{AB'}|} = \frac{\underline{B'} - \underline{A'}}{|\underline{AB'}|} = \frac{(0, 1, 0)}{1} = \underline{\hat{j}}$$

$$\therefore \underline{P}_2 = \underline{2\hat{j}} , \underline{P}_3 = P_3 \underline{\hat{P}}_3$$

$$\underline{\hat{P}}_3 = \frac{\underline{AD'}}{|\underline{AD'}|} = \frac{\underline{D'} - \underline{A}}{|\underline{AD'}|} = \frac{(1, 0, 1)}{\sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}} (\underline{\hat{i}} + \underline{\hat{k}})$$

$$\therefore \underline{P}_3 = \underline{2\hat{i} + 2\hat{k}}$$

$$\underline{P} = \underline{P}_1 + \underline{P}_2 + \underline{P}_3 = \underline{-\hat{i} + 2\hat{j} + 5\hat{k}} \rightarrow \textcircled{\times}$$

القوة المخرصة :
 $\underline{M} = r_{AB} \times \underline{P}_1 + r_{AC} \times \underline{P}_2 + r_{AD} \times \underline{P}_3$

$$\underline{M} = \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ 1 & 1 & 0 \\ -3 & 0 & 3 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \end{vmatrix} + 0$$

$$= (3\hat{i} - 3\hat{j} + 3\hat{k}) + (-2\hat{i}) + 0 = \underline{\hat{i} - 3\hat{j} + 3\hat{k}}$$

النتيجة :
 القوة المخرصة :
 $\underline{M} = \underline{\hat{i} - 3\hat{j} + 3\hat{k}}$

النسبة هذه هي التي نحتاجها. نحتاج أن تكون $P \cdot M \neq 0$ علاوة على ذلك

$P \cdot M = 0$ نحتاج القوة وحدة

$$\Rightarrow P \cdot M = (-\hat{i} + 2\hat{j} + 5\hat{k}) \cdot (\hat{i} - 3\hat{j} + 3\hat{k}) = -1 - 6 + 15 = 8$$

نحتاج الوحدة

$$P = \frac{P \cdot M}{f_2} = \frac{8}{30} \rightarrow \text{و در اینجا بگویند } f_2 = 30$$

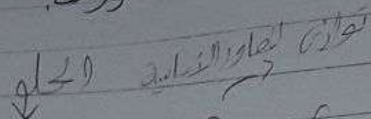
$$(X', Y', Z') = \frac{P \cdot M}{f_2} = \frac{\begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ -1 & 2 & 5 \\ 1 & -3 & 3 \end{vmatrix}}{30} = \frac{21\hat{i} + 8\hat{j} + \hat{k}}{30}$$

و ما کاره که عملها

$$\Rightarrow X' = \frac{21}{30}, Y' = \frac{8}{30}, Z' = \frac{1}{30}$$

$$\frac{X - X'}{P_x} = \frac{Y - Y'}{P_y} = \frac{Z - Z'}{P_z} \Rightarrow \frac{X - \frac{21}{30}}{-1} = \frac{Y - \frac{8}{30}}{2} = \frac{Z - \frac{1}{30}}{5}$$

1. مجلس القضاء
 2. مجلس الشورى
 3. مجلس الوزراء
 4. مجلس الشعب
 5. مجلس الدولة
 6. مجلس التعليم
 7. مجلس الصحة
 8. مجلس الزراعة
 9. مجلس الصناعة
 10. مجلس التجارة
 11. مجلس النقل
 12. مجلس الثقافة
 13. مجلس الإعلام
 14. مجلس الشباب
 15. مجلس المرأة
 16. مجلس البيئة
 17. مجلس التخطيط
 18. مجلس المالية
 19. مجلس العدل
 20. مجلس الأمن
 21. مجلس السلام
 22. مجلس التعاون
 23. مجلس الحوار
 24. مجلس التفاهة
 25. مجلس الحكمة
 26. مجلس العزلة
 27. مجلس الغفلة
 28. مجلس النسيان
 29. مجلس الجهل
 30. مجلس التوهم
 31. مجلس الخيال
 32. مجلس الوهم
 33. مجلس الحزن
 34. مجلس الفرح
 35. مجلس الحزن
 36. مجلس الفرح
 37. مجلس الحزن
 38. مجلس الفرح
 39. مجلس الحزن
 40. مجلس الفرح
 41. مجلس الحزن
 42. مجلس الفرح
 43. مجلس الحزن
 44. مجلس الفرح
 45. مجلس الحزن
 46. مجلس الفرح
 47. مجلس الحزن
 48. مجلس الفرح
 49. مجلس الحزن
 50. مجلس الفرح
 51. مجلس الحزن
 52. مجلس الفرح
 53. مجلس الحزن
 54. مجلس الفرح
 55. مجلس الحزن
 56. مجلس الفرح
 57. مجلس الحزن
 58. مجلس الفرح
 59. مجلس الحزن
 60. مجلس الفرح
 61. مجلس الحزن
 62. مجلس الفرح
 63. مجلس الحزن
 64. مجلس الفرح
 65. مجلس الحزن
 66. مجلس الفرح
 67. مجلس الحزن
 68. مجلس الفرح
 69. مجلس الحزن
 70. مجلس الفرح
 71. مجلس الحزن
 72. مجلس الفرح
 73. مجلس الحزن
 74. مجلس الفرح
 75. مجلس الحزن
 76. مجلس الفرح
 77. مجلس الحزن
 78. مجلس الفرح
 79. مجلس الحزن
 80. مجلس الفرح
 81. مجلس الحزن
 82. مجلس الفرح
 83. مجلس الحزن
 84. مجلس الفرح
 85. مجلس الحزن
 86. مجلس الفرح
 87. مجلس الحزن
 88. مجلس الفرح
 89. مجلس الحزن
 90. مجلس الفرح
 91. مجلس الحزن
 92. مجلس الفرح
 93. مجلس الحزن
 94. مجلس الفرح
 95. مجلس الحزن
 96. مجلس الفرح
 97. مجلس الحزن
 98. مجلس الفرح
 99. مجلس الحزن
 100. مجلس الفرح



$$P_2 = PK$$

P₃ = P₀

$$\underline{F}_1 \quad \underline{F} = \underline{F}_1 + \underline{F}_2 + \underline{F}_3 = F(\underline{i}, \underline{j}, \underline{k}) \quad (1)$$

$$= \hat{k} + 2\hat{i} + 3\hat{j} - (2\hat{i} + 3\hat{j} + \hat{k}) \hat{r}$$

المجلس

$$\underline{K_n} \underline{f} - M \underline{P} \underline{f}$$

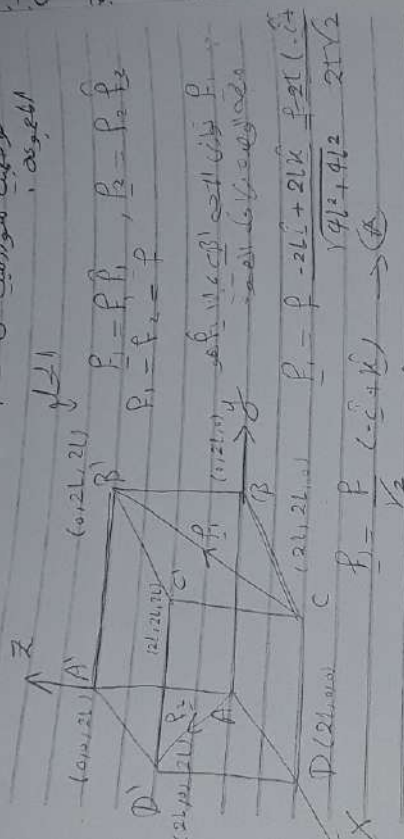
1000

$(2P_1 + 2P_2 + 2P_3)$
 ...
 ...

$$C \begin{bmatrix} 1 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} + (X-Y)K = 0 \quad \begin{matrix} P_1 = P_2 = P_3 \\ P_1 = P_2 = P_3 \end{matrix}$$

$$Y-Z=0, \quad Z-X=1, \quad X-Y=-1$$

نكون في طريق إيجاد
 ف تكون في طريق إيجاد
 ف تكون في طريق إيجاد
 ف تكون في طريق إيجاد



نكون في طريق إيجاد

$$P_1 = P_2 = P_3 = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$P_2 = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$P_1 = P_2 = P_3 = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

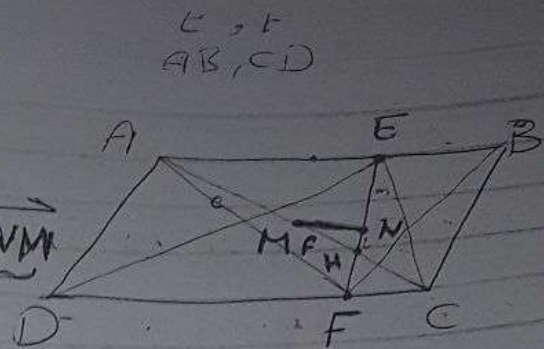
$$M = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$M = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

نكون في طريق إيجاد

A

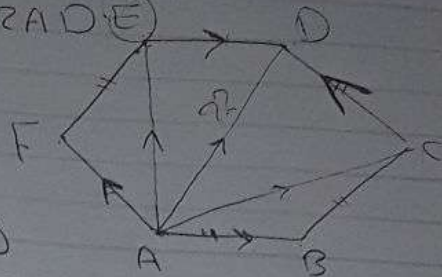
$$\vec{EC} + \vec{ED} + \vec{FA} + \vec{FB} = 4\vec{NM}$$



• 2D Lab / 3D Lab •
dimensionless •

normal mode analysis •
 $W = \phi_z - \gamma_x$, $U = \phi_z + \gamma_z$ •
solution of the P.D.E.s •
Boundary Condition •

$$\vec{AB} + \vec{AC} + \vec{AE} + \vec{AF} = 2\vec{AD} \quad (E)$$



$$\vec{AC} + \vec{CD} = \vec{AD} \rightarrow (1)$$

$$\vec{AE} + \vec{ED} = \vec{AD} \rightarrow (2)$$

$$\vec{AC} + \vec{CD} + \vec{AE} + \vec{ED} = 2\vec{AD}$$

$$\vec{AC} + \vec{AF} + \vec{AE} + \vec{AB} = 2\vec{AD}$$

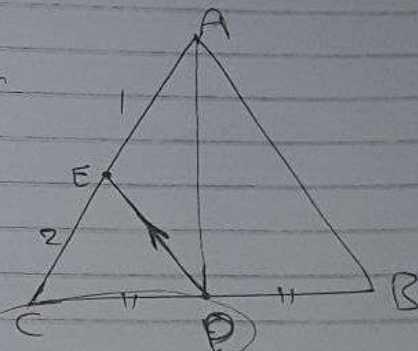
$$2\vec{BC} + \vec{CA} + \vec{BE} = 6\vec{DE}$$

$$\vec{AB} + \vec{AC} = 2\vec{AD}$$

$$-2\vec{DA} = -\vec{BA} - \vec{CA}$$

$$\vec{DE} = \vec{DA} + \vec{AE} \rightarrow (1)$$

$$\vec{DE} = \vec{DC} + \vec{CE} \rightarrow (2)$$



$$\frac{AE}{EC} = \frac{1}{2} \Rightarrow 2AE - EC = 0$$

$$2 \times (1) \Rightarrow 2\vec{DE} = 2\vec{DA} + 2\vec{AE} \rightarrow (3)$$

$$3\vec{DE} = 2\vec{DA} + \vec{DC} + 2\vec{AE} + \vec{CE}$$

$$3\vec{DE} = 2\vec{DA} + \vec{DC} + (2\vec{AE} - \vec{CE}) \quad \begin{matrix} \uparrow \\ \rightarrow 0 \end{matrix}$$

$$3\vec{DE} = 2\vec{DA} + \vec{DC} = 2\vec{BA} + \vec{CA} + \vec{DC}$$

السؤال الأول / ضع علامة ✓ أو ✗

(1) الوزن والكتلة كمية مقيسة (X)

(2) إذا استخدم الميزان القياسي لمقياس فإن النتيجة مباشرة (✓)

(3) يستخدم الميزان الإشعاعي إذا كان المقياس متوازياً (✓)

(4) يستخدم الميزان الثلاثي القياسي إذا كانت النتيجة لجميع المقياسات متساوية (X)

(5) الميزان الثلاثي القياسي يقيس جميع متوازنات السطح (✓)

(6) الميزان الثلاثي القياسي يقيس مساحة متوازن الزفلاخ (X)

السؤال الثاني / ✓ أو ✗

إذا كانت المتجهات $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ على الترتيب $\vec{c} = -5\vec{i} + 8\vec{j} + 4\vec{k}$

حيث $\vec{a} = 2\vec{i} + \vec{j} + 5\vec{k}$ ، $\vec{b} = 2\vec{i} - 2\vec{j} + 2\vec{k}$ فإن

(i) $\vec{a} \cdot \vec{b} = 12$ (ii) $\vec{a} \wedge \vec{b} = \vec{i} - \vec{j} + 5\vec{k}$

(iii) $\vec{a} \cdot (\vec{b} \wedge \vec{c}) = 0$

(iv) $\vec{a} \cdot (\vec{b} \wedge \vec{c}) = \vec{i} - 2\vec{j} + 5\vec{k}$

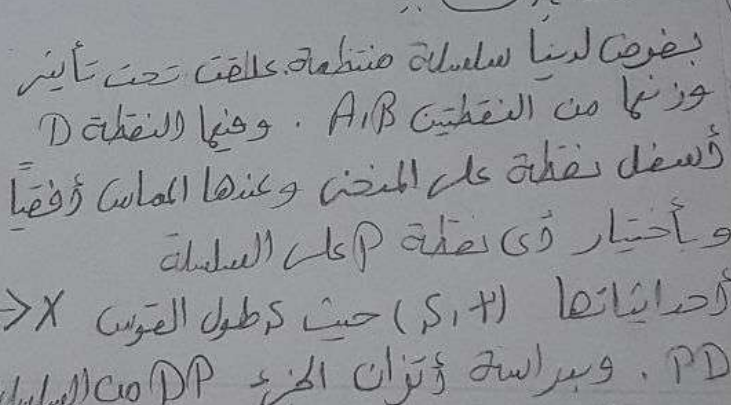
6216

مكتوب

11/11/11

1

1



100

$$T \cos(\theta) = T_0$$

$$T \cos(\theta) = WC \rightarrow (1)$$

في حالة التوازن:
مركبات القوى الزفقية

$$T \sin(\theta) = W_S \rightarrow (2)$$

مركبات القوى الشثوية

$$\frac{T \sin(\theta)}{T \cos(\theta)} = \frac{W_S}{WC} \Rightarrow \tan(\theta) = \frac{S}{C}$$

$$\therefore \boxed{S = C \tan(\theta)}$$

كذلك المعادلة الذاتية لمنحن الكثيفة .

المعادلة الكارتيزية لمنحن الكثيفة

المعادلة الكارتيزية تكون عبارة عن علاقة بين y و x .

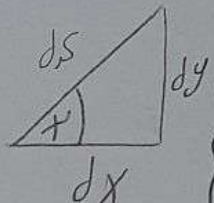
وبدراسة جزء معين من منحن الكثيفة

$$\sin(\theta) = \frac{dy}{ds} \quad (5)$$

$$\cos(\theta) = \frac{dx}{ds} \quad (6)$$

$$\tan(\theta) = \frac{dy}{dx} \quad (7)$$

$$ds^2 = (dx)^2 + (dy)^2 \quad (8)$$



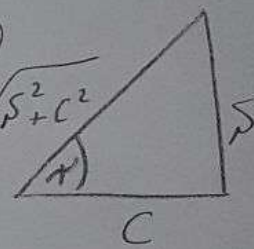
من المعادلة الذاتية لمنحن الكثيفة

$$S = C \tan(\theta) \rightarrow (1)$$

$$\therefore \tan(\theta) = \frac{S}{C} \rightarrow (2)$$

$$\sin(\theta) = \frac{S}{\sqrt{S^2 + C^2}} \quad (3)$$

$$\cos(\theta) = \frac{C}{\sqrt{S^2 + C^2}} \quad (4)$$



$$\frac{dy}{dx} = \frac{s}{c}$$

→ المقاضد بالنسبة لـ X

$$\frac{d}{dx} \left(\frac{dy}{dx} \right) = \frac{1}{c} \frac{ds}{dx}$$

$$\Rightarrow \frac{dy'}{dx} = \frac{1}{c} \frac{ds}{dx}$$

$$\frac{ds}{dx} = (?)$$

$$\left(\frac{ds}{dx} \right)^2 = 1 + \left(\frac{dy}{dx} \right)^2$$

بمقدار (8) على $(dx)^2$

$$\Rightarrow \frac{ds}{dx} = \pm \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx} \right)^2}$$

$$\therefore \frac{ds}{dx} = \sqrt{1 + (y')^2}$$

← مرفوض
لأننا شكالين $\sqrt{\text{طوال}}$

→ (10)

التحويل من (10) في (9) نجد أن

$$\frac{dy'}{dx} = \frac{1}{c} \sqrt{1 + (y')^2}$$

بعض المتغيرات والكامل

$$\therefore \int \frac{dy'}{\sqrt{1 + y'^2}} = \frac{1}{c} \int dx$$

$$\sinh^{-1}(y') = \frac{1}{c} X + C_1$$

$$\Rightarrow C_1 = (?)$$

التي نعين الثابت نستخدم الشروط الابتدائية عند أسفل نقطة

$$X=0, y=C \Rightarrow y'_0 = 0$$

$$\therefore \sinh^{-1}(0) = 0 + C_1$$

$$\Rightarrow \therefore \boxed{C_1 = 0}$$

$$\therefore \sinh^{-1}(y') = \frac{X}{c}$$

→ (11)

$$y' = \sinh(X/c)$$

بالضرب في $\sinh$ للطرفين

$$\sinh(x/c)$$

$$dy = \int \sinh(x/c) dx$$

$$\frac{dy}{dx} = \sinh(x/c)$$

بعض المتغيرات والتكامل

$$y = \frac{1}{1/c} \cosh(x/c) + C_2$$

$$\Rightarrow y = C \cosh(x/c) + C_2$$

من الشروط الابتدائية عند نقطة الأصل $x=0, y=C$

$$C = C \cosh(0) + C_2$$

$$\Rightarrow C = C + C_2$$

$$\Rightarrow C_2 = 0$$

$$\therefore y = C \cosh(x/c)$$

المعادلة البارامتريكية لمنحنى الكتيبة.

المعادلة البارامتريكية لمنحنى الكتيبة

المقصود بالمعادلة البارامتريكية هي أن نجد كل من x و y بدلالة متغير ثالث

وسيط يسمى "بارامتر".

$$x \rightarrow s, y \rightarrow s$$

$$x \rightarrow t, y \rightarrow t$$

من المعادلات (4), (6)

$$\frac{dx}{ds} = \frac{c}{\sqrt{s^2 + c^2}}$$

$$\Rightarrow \frac{dx}{ds} = \frac{c}{\sqrt{c^2(\frac{s^2}{c^2} + 1)}}$$

$$\frac{dx}{ds} = \frac{c}{c \sqrt{(s/c)^2 + 1}}$$

بعض المتغيرات والتكامل

$$\int dx = \int \frac{1/c ds}{\sqrt{(s/c)^2 + 1}}$$

$$\Rightarrow x = c \sinh^{-1}(s/c) +$$

(5)

$$X = c \sinh^{-1}(s/c) + C_4$$

مثال: ربط التبادلية عند أسفل نقطة المنحنى

$$X=0, y=c$$

$$\therefore \boxed{C_4 = 0} \Rightarrow \therefore \boxed{X = c \sinh^{-1}(s/c)}$$

$$X = c \ln \left(\frac{s}{c} + \sqrt{\frac{s^2}{c^2} + 1} \right)$$

$$= c \ln \left[\frac{s}{c} + \frac{\sqrt{s^2 + c^2}}{c} \right] = c \ln \left(\frac{s + \sqrt{s^2 + c^2}}{c} \right)$$

$X = X(s)$

$$\frac{dy}{ds} = \frac{s}{\sqrt{s^2 + c^2}} \quad \leftarrow \text{من المعادلة (3), (5)}$$

بعض المتغيرات والحاصل

$$\int dy = \frac{1}{2} \int \frac{2s}{\sqrt{s^2 + c^2}} ds \Rightarrow y = \frac{1}{2} \cdot 2 \sqrt{s^2 + c^2} + C_5$$

البسط تفاضل ما تحت الجذر

$$y = \sqrt{s^2 + c^2} + C_5$$

من التبادلية عند أسفل نقطة

$$X=0, y=c$$

$$\therefore C = C + C_5 \Rightarrow \boxed{C_5 = 0}$$

$$\therefore \boxed{y = \sqrt{s^2 + c^2}} \rightarrow y = y(s)$$

لنوجد $X = X(t)$ نستخدم قواعد التفاضل

$$\frac{dX}{dt} = \frac{dX}{ds} \frac{ds}{dt} = \cosh(t) \cdot c \sec^2(t)$$

(6) (1)

$$\therefore \frac{dX}{dt} = c \frac{\cosh(t)}{\cosh^2(t)} = \frac{c}{\cosh(t)}$$

$$\therefore \frac{dX}{dt} = c \sec(t)$$

$$\rightarrow \int dX = c \int \sec(t) dt$$

$$x = C \ln | \sec(x) + \tan(x) | \rightarrow x = x(x)$$

لنجد $x = x(y)$ ← باستخدام قواعد التفاضل

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{ds} \frac{ds}{dx}$$

(6) ← (1)

$$\frac{dy}{dx} = \sin(x) C \sec^2(x) = \frac{C \sin(x)}{\cos^2(x)} = \frac{C \sin(x)}{\cos(x)}$$

$$\frac{dy}{dx} = C \tan(x) \cdot \sec(x)$$

بفصل المتغير والتكامل

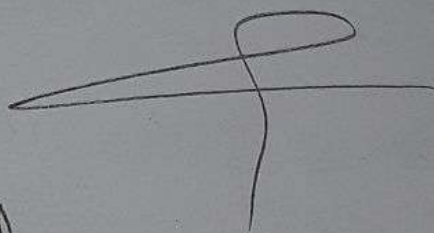
$$\therefore \int dy = C \int \tan(x) \sec(x) dx$$

$$y = C \sec(x) + C_6$$

$x=0, y=C$ من الشروط الابتدائية

$$\therefore C = C + C_6 \Rightarrow C_6 = 0$$

$$\therefore \boxed{y = C \sec(x)} \rightarrow y = y(x)$$



أسرار
العزوني

POXI

$$A = \frac{dy}{dx} = \frac{1}{5} \ln \left| \frac{y}{1-y} \right|$$

Since $T_{CBK} = WC$

$$T = \frac{WC}{Q_8(T)} = WC \sec(T)$$

Simil $y = C_{\text{sec}}(t) \Rightarrow y = y(t)$

$$\sqrt{T = wy}$$

1. الشد = وزن وحدة الشد طول $\times$ التمدد المرن.

* $\sqrt{T_0 = WC}$ کا قول

الصورة القياسية لمعادلة الكتلة (أسلاك التليفون)

المصورة القياسية لمعادلة الكينما (المعادلة التفاضلية)
تذكر/ منضم الكينما عبارة عن قبل مثبت من نقطتين.

كلما زاد لشيء السلك كلما زاد ارتفاع عن سطح الأرض (كمثال)

كما زاد لي (السلك) إذا زاد الطول
فإذا فرضنا أن السلك يتألف من خيوط صغيرة
 $y = c \cosh\left(\frac{x}{c}\right)$

فإذا فرضنا أن الكمية y تتغير مع المتغير x وفقاً للمعادلة $y = c \ln(x)$ ، حيث c ثابت، وبالنسبة إلى المتغير x ، فإن المتغير y يتغير وفقاً للمعادلة $y = c \ln(x)$ ، حيث c ثابت.

وبالتالي فإن من الممكن إهمال الحدود ذات القوى الأقل

$$y = c \cosh\left(\frac{x}{c}\right) = \frac{1}{2} c (e^{x/c} + e^{-x/c})$$

$$e^{x/c} = 1 + \frac{x}{c} + \frac{1}{2!} \frac{x^2}{c^2} \quad , \quad e^{-x/c} = 1 - \frac{x}{c} + \frac{x^2}{2c^2}$$

$$y = C/2 \left[2 + \frac{x^2}{C^2} \right] = C + \frac{x^2}{2C}$$

$$\therefore \frac{x^2}{2c} = y - c \Rightarrow x^2 = 2c(y - c)$$

$$F = F_1 + F_2 + \dots + F_n$$

$$P = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n m_i$$

→ (U)
do not change
(Y₁ P = yellow)
+ Y₂ A P

PROX

القوى المتغيرة مع المكان
والطاقة تكون

$$x^2 = 2c(y-c)$$

وذلك في حالة وجود القوة

$$r = \frac{c}{2} \left[e^{x/c} - e^{-x/c} \right]$$

$$r = \frac{c}{2} \left[1 + \frac{x}{c} + \frac{x^2}{2c^2} + \frac{x^3}{6c^3} + \frac{x^4}{24c^4} + \dots \right] + \frac{x}{c} - \frac{x^2}{2c^2} + \frac{x^3}{6c^3} - \frac{x^4}{24c^4} + \dots$$

$$r = \frac{c}{2} \left[\frac{2x}{c} + \frac{2x^3}{6c^3} \right]$$

$$r = \left[x + \frac{x^3}{c} \right]$$

المعادلة التفاضلية التامة
والتي هي

$$S = c \tan(x)$$

$$y = c \sinh(x/c)$$

$$c \ln \left(\frac{S+y}{c} \right) = x = c \sinh^{-1} \left(\frac{y}{c} \right)$$

$$y = \sqrt{S^2 + c^2}$$

$$x = c \ln(\tan(x) + \sec(x))$$

$$y = c \sec(x)$$

المعادلة التامة

المعادلة التامة

$$x = x/1$$

$$y = y/1$$

$$x = x(x)$$

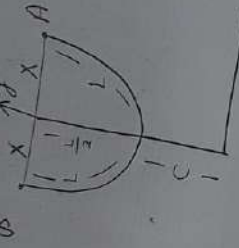
$$y = y(x)$$

كلفت سلعاً طويلاً 2L من نصيب A, B, C
 (المستوى الزئبقى فإذا كان نصفها 1/2 L وثبت

أن المساحة الزئبقية $AB = \frac{3}{2} L \ln(3)$

(2) $\frac{T_A}{T_B} = \frac{5}{3}$

الشرع على التعلق بالزئبقية عند رأس الكنية.



$\therefore AB = 2X = 2C \ln\left(\frac{5+y}{C}\right)$

$\delta = L, y = \frac{1}{2} + C$

$\therefore y^2 = C^2 + \delta^2$

$\rightarrow \left(\frac{L}{2} + C\right)^2 = C^2 + L^2$

$LC = \frac{3L^2}{4}$

$\therefore y = \frac{L}{2} + \frac{3L}{4} = \frac{5L}{4}$

$\therefore AB = 2 \cdot \frac{3L}{4} \ln\left(\frac{L + \frac{5L}{4}}{\frac{3L}{4}}\right) = \frac{3L}{2} \ln(3)$

$T_A = W y = W \cdot \frac{5L}{4} = \frac{5LW}{4}$

$T_B = WC = \frac{3LW}{4}$

$\frac{T_A}{T_B} = \frac{5}{3}$

من (1) $\frac{T_A}{T_B} = \frac{5}{3}$
 $\frac{W \cdot \frac{5L}{4}}{WC} = \frac{5}{3}$
 $\frac{5L}{4C} = \frac{5}{3}$
 $\frac{L}{4C} = \frac{1}{3}$
 $3L = 4C$
 $C = \frac{3L}{4}$

مثال

ماذا عكفت سلسلة فضلكم طولها $2L_0$ من التعلقين بحيث كان AB أفقياً فإذا كان الشد عند الطرف A $\frac{1}{2}$ من الشد عند رأس السلسلة عكفت وزن

$$AB = \frac{L_0}{\sqrt{2}} \ln(3+2\sqrt{2})$$

$$T_A = 3T_0$$

$$wy = 3wc$$

$$y = 3c \rightarrow (1)$$

$$\sqrt{s^2 + c^2} = 3c \quad \text{تسريع المرفق}$$

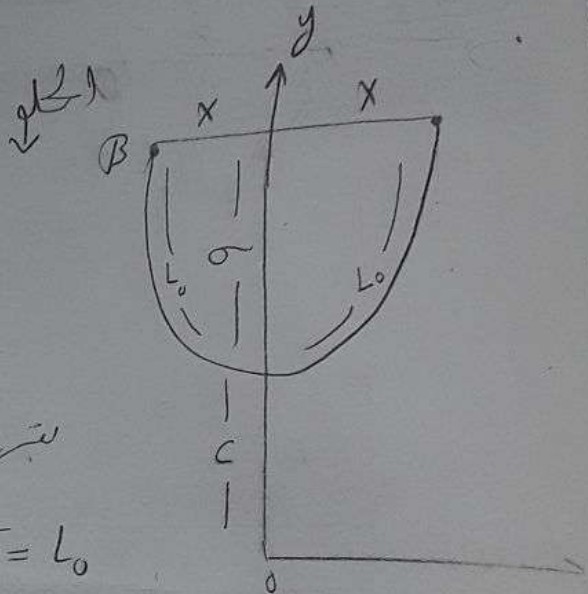
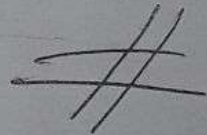
$$s^2 + c^2 = 9c^2 \quad ; \quad s = L_0$$

$$L_0^2 + c^2 = 9c^2 \Rightarrow L_0^2 = 8c^2$$

$$\Rightarrow \left[c = \frac{L_0}{2\sqrt{2}} \right] (2)$$

$$y = \frac{3L_0}{2\sqrt{2}} \quad \text{من (1) في (2)}$$

$$AB = 2x = 2c \ln\left(\frac{s+y}{c}\right) = 2 \frac{L_0}{2\sqrt{2}} \ln\left(\frac{L_0 + \frac{3L_0}{2\sqrt{2}}}{L_0/2\sqrt{2}}\right) = \frac{L_0}{\sqrt{2}} \ln(3+2\sqrt{2})$$



$$AB = 2X = 2C \ln\left(\frac{s+y}{C}\right)$$

$$AB = 2C \ln\left(\frac{L + \frac{L}{n} + \frac{nL}{2}(1 - \frac{1}{n^2})}{\frac{nL}{2}(1 - \frac{1}{n^2})}\right)$$

$$= nL\left(1 - \frac{1}{n^2}\right) \ln\left(\frac{1 + \frac{1}{n} + \frac{n}{2} - \frac{1}{2n}}{\frac{n}{2} - \frac{1}{2n}}\right)$$

بجانب البسط فالتالي
(ln 1) 2n

$$= nL\left(1 - \frac{1}{n^2}\right) \ln\left(\frac{2n + 2 + n^2 - 1}{n^2 - 1}\right)$$

$$= nL\left(1 - \frac{1}{n^2}\right) \ln\left(\frac{n^2 + 2n + 1}{(n-1)(n+1)}\right)$$

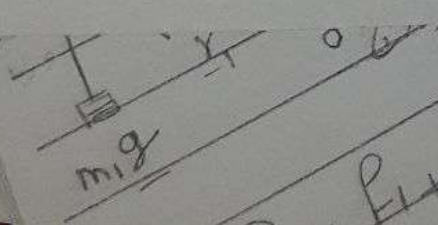
$$= nL\left(1 - \frac{1}{n^2}\right) \ln\left(\frac{(n+1)^2}{(n-1)(n+1)}\right)$$

$$AB = nL\left(1 - \frac{1}{n^2}\right) \ln\left(\frac{n+1}{n-1}\right)$$

$$\frac{T_A}{T_0} = \frac{W_y}{WC} = \frac{y}{C} = \frac{L/n + \frac{nL}{2}(1 - \frac{1}{n^2})}{\frac{nL}{2}(1 - \frac{1}{n^2})}$$

$$= \frac{\frac{L}{n} + \frac{L(n^2-1)}{2n}}{\frac{2n^2L - 2L}{4n}} = \frac{\frac{L}{2n} + \frac{L(n^2-1)}{2n}}{\frac{n^2-1}{2n}}$$

$$= \frac{(n^2+1)}{(n^2-1)}$$



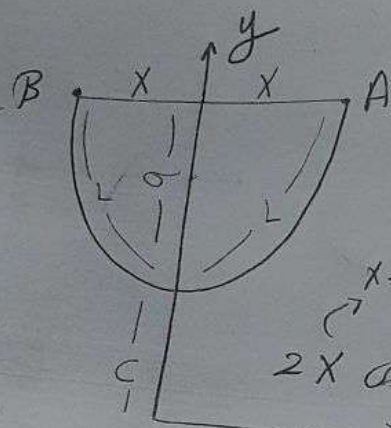
$$P = F_1 + F_2 + \dots + F_n$$

$$P = F_1 + F_2 + \dots + F_n$$

مثال / إذا كانت سلسلة من نقطتين من نفس المستوى الثوري وكان
 عمق السلسلة يساوي $\frac{L}{n}$ حيث $2L$ طول السلسلة. أثبت
 أن المسافة التقريبية بين نقطتي التعليق هي

$$L \left(n - \frac{1}{n} \right) \ln \left(\frac{n+1}{n-1} \right)$$

(أ) النسبة بين الشد عند نقطتي التعليق إلى الشد عند أسفل
 نقطة $\frac{T_A}{T_0} = \left(\frac{n^2+1}{n^2-1} \right)$



الحل

طول السلسلة $L = s$

عمق السلسلة $\frac{L}{n} = y$

بارامتر السلسلة $(?) = c$

تفرض أن المسافة بين نقطتي التعليق تساوي $2X$

$$2X = 2c \ln \left(\frac{s+y}{c} \right) \rightarrow (1)$$

$$[c = ?]$$

$$y = s + c = \frac{L}{n} + c \rightarrow$$

$$y^2 = s^2 + c^2 \quad \text{وبما أن} \quad y = \sqrt{s^2 + c^2}$$

$$\therefore \left(\frac{L}{n} + c \right)^2 = L^2 + c^2 \Rightarrow \frac{L^2}{n^2} + \frac{2Lc}{n} + c^2 = L^2 + c^2$$

$$\therefore \frac{2Lc}{n} = L^2 \left(1 - \frac{1}{n^2} \right)$$

$$\therefore \left[C = \frac{nL}{2} \left(1 - \frac{1}{n^2} \right) \right] \rightarrow (3)$$

بالتعويض من (2), (3) غير (1)

نقسم ذلك الوقت الوسيط

والعاصرة للزوايا
تساوي (5)

مركز الكتلة

يعني أن مركز النقل أو الكتلة (5) قاله هو النقطة التي يتوقف عنها
التران الجسم . (يعني أن مركز الكتلة هو نقطة التوقف)
لو قلنا صحت ومثبت علم من الحق كما هلافت يقع تحت مركزنا ولو
مستقيم من قوا شوية كان هيصل نفس الموضع لكن لو مستقيم
مستقيم هلافت تران لنش مركز نقل في المنتصف

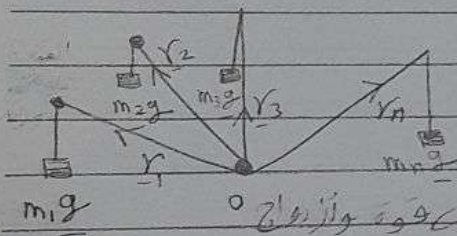
يعني أن مركز نقل / نقطة نقلها بالبرهان $\vec{r} = (\bar{x}, \bar{y}, \bar{z})$
(5)
تعالوا بقا نستخرج الكلام دا

نستخرج مركز كتلة مجموعة من الجسيمات

9

(أو كتلة جسيم متأثر ذات كتلة قوا)

متجه القوة المؤثرة على هذا الجسم
(وزنه)



$$\underline{F}_1 = m_1 \underline{g}, \quad \underline{F}_2 = m_2 \underline{g}, \quad \dots, \quad \underline{F}_n = m_n \underline{g}$$

ويكون هذا هو القوة عند نقطة النقل السوية والزوج

$$\underline{F} = \underline{F}_1 + \underline{F}_2 + \dots + \underline{F}_n = m_1 \underline{g} + m_2 \underline{g} + \dots + m_n \underline{g}$$

$$\therefore \underline{F} = \underline{g} \sum_{i=1}^n m_i \quad \text{--- (6)}$$

وهناك أن الزوايا حول نقطة النقل يساوي مجموع العزوم لهذه القوة
(وأيضا عارضة أن العزم $\underline{r}_n \wedge \underline{F}_n$)

$$\underline{M} = \underline{r}_1 \wedge \underline{F}_1 + \underline{r}_2 \wedge \underline{F}_2 + \dots + \underline{r}_n \wedge \underline{F}_n$$

ROX

(3) التكوين

Date: _____

$$\begin{aligned}
 \underline{M}_0 &= \underline{r}_1 \wedge m_1 \underline{g} + \underline{r}_2 \wedge m_2 \underline{g} + \underline{r}_3 \wedge m_3 \underline{g} + \dots + \underline{r}_n \wedge m_n \underline{g} \\
 &= \underline{r}_1 m_1 \underline{g} + \underline{r}_2 m_2 \underline{g} + \underline{r}_3 m_3 \underline{g} + \dots + \underline{r}_n m_n \underline{g} \\
 &= \left(\sum_{i=1}^n \underline{r}_i m_i \right) \wedge \underline{g} \quad \text{②}
 \end{aligned}$$

نكالمها كما في ⑤ $\underline{P} \cdot \underline{M}_0$

$$\underline{P} \cdot \underline{M} = \underline{g} \sum_{i=1}^n m_i \cdot \left(\sum_{i=1}^n \underline{r}_i m_i \right) \wedge \underline{g} = 0$$

حاصل ضرب متجهين (أحداهما عبارة عن عدد) في متجه متساوية
 إلى الصفر = صفر

$$\underline{P} \cdot \underline{M} = 0 \Rightarrow \text{الاجزء تؤدى الى القوة وليست}$$

وبالتالى فإن مجموع عزوم هذه القوة حول نقطة التماس

$$\underline{r} \wedge \underline{F} = \underline{M}_0 \quad ; \quad \underline{r} = (x, y, z) \quad \text{لو كانت اولية كان هيس}$$

مكافئة $\underline{r} \wedge \underline{F} = \underline{M} - \underline{P} \underline{F}$

$$\underline{r} \wedge \underline{g} \sum_{i=1}^n m_i = \left(\sum_{i=1}^n \underline{r}_i m_i \right) \wedge \underline{g}$$

$$\sum_{i=1}^n \underline{r}_i m_i \wedge \underline{g} = \left(\sum_{i=1}^n \underline{r}_i m_i \right) \wedge \underline{g}$$

$$\left[\sum_{i=1}^n \underline{r}_i m_i - \sum_{i=1}^n \underline{r}_i m_i \right] \wedge \underline{g} = 0$$

متجه ثابت ($\underline{g} \neq 0$)

$$\underline{r} \sum_{i=1}^n m_i = \sum_{i=1}^n m_i \underline{r}_i \Rightarrow \underline{r} = \frac{\sum_{i=1}^n m_i \underline{r}_i}{\sum_{i=1}^n m_i}$$

$$\bar{r} = \frac{\sum_{i=1}^n m_i r_i}{\sum_{i=1}^n m_i}$$

$$\Rightarrow \bar{x} = \frac{\sum_{i=1}^n m_i x_i}{\sum_{i=1}^n m_i}, \quad \bar{y} = \frac{\sum_{i=1}^n m_i y_i}{\sum_{i=1}^n m_i}, \quad \bar{z} = \frac{\sum_{i=1}^n m_i z_i}{\sum_{i=1}^n m_i}$$

• وإذا كان لدينا جسم متجانس "D" ليجاد مركز ثقله نقسمه الى عناصر صغيرة ذات كتلة dm ويكون الـ $\bar{r}$

$$\bar{r} = \frac{\int \bar{r} dm}{\int dm} \Rightarrow \begin{cases} \bar{x} = \frac{\int x dm}{\int dm} & , \quad \bar{y} = \frac{\int y dm}{\int dm} \\ \bar{z} = \frac{\int z dm}{\int dm} \end{cases}$$

مركز ثقل الكتلة

• حولناه لثقله لكتلة بخصيص مركز ثقله عنده صغير وليس الجسم كله

• الـ (D) الـ R للـ R هو على امتداد أو مساحة أو حجم حسب طبيعة الجسم

طلب الـ dm (S) بحالوا انفسكم كذا أيضا عندنا 3 أنواع من الـ dm

(1) كثافة طولية λ ← وكذا نستخرج كتلة وحدة الطول $dm = \lambda dl$

(2) كثافة سطحية σ ← وكذا نستخرج كتلة وحدة المساحة $dm = \sigma dS$

(3) كثافة حجمية ρ ← وكذا نستخرج كتلة وحدة الحجم $dm = \rho dV$

ملحوظات هامة:

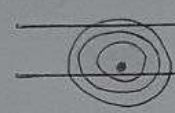
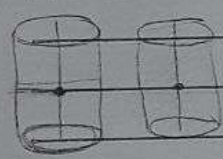
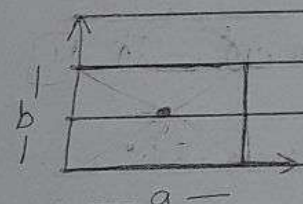
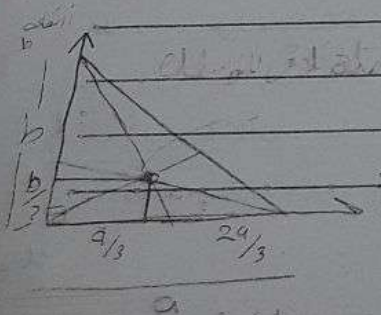
(1) محور ثقل الجسم - هو المحور الذي انقسم الشكل الى جزئين متساويين

(2) مركز الكتلة / الثقل يقع على محور الثقل $\bar{x} = 0$

(3) عند حساب الكتلة m فان محور الثقل يقع على المحور الرئيسي

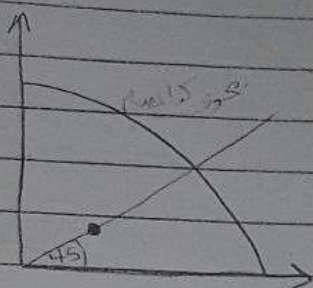
بالسكويين "D" هو الجسم المتجانس

3) مركز الشكل الهندسي الذي كثافته مركز الثقل
 + مستقيم الاتجاه (3) مسائل ثابتة على طول
 2) مركز ثقل الشكل الهندسي (الوقوف) :-

الشكل	المساحة	$\bar{x}$	$\bar{y}$
	مركز ثقل الخط هو منتصفه		
	مركز ثقل دائرة دائرية هي مركزها الهندسي		
	مركز ثقل دوائر دائرية متحدة هو مركزها الهندسي (مستقيم اتجاه)		
	مركز كتلة (المساحة) الموضوعة والنسب المتكافئة المتكافئة هو منتصف محورها		
	ab	$\frac{a}{2}$	$\frac{b}{2}$
	$\frac{1}{2}ab$	$\frac{a}{3}$	$\frac{b}{3}$

وكان
أولئك هم القسيس الحميم
- نصيب Page dm
X, y - ٣٠
(طوبى, احسن, س)

2d 11

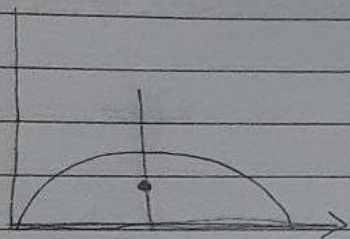


$$\frac{\pi R^2}{4}$$

$$\begin{array}{r} 4R \\ \hline 3TT \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 4R \\ \hline 3T \end{array}$$

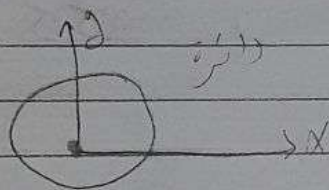
نصف دائرة



$$\frac{\pi R^2}{2}$$

R

$$\frac{4R}{3T}$$



πR^2

0.1111

(نقطة) الكلام دائما هو المركز هو نقطة الاتصال

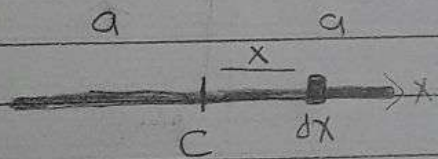
Хорошо

بكالوا نشوف مال بيسه نشوف الراكح وراكح وراكح (5)

11) کتب: کن مرقہ کلام حقینا رفع فتنام احوالہ

94

فهرست طول القیف 2a و کلافه 2b



الخطوط h وتقسيم الأضلاع

مؤلفه و مؤلف في الناصر طه الله د

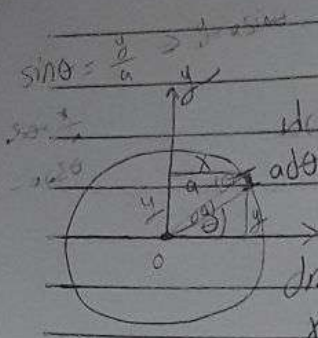
1. $\text{C}_2\text{H}_5\text{COOH} + \text{C}_2\text{H}_5\text{COOH} \rightleftharpoons \text{C}_2\text{H}_5\text{COOC}_2\text{H}_5 + \text{H}_2\text{O}$

$$\therefore X = \frac{-a \int_0^a X e^{-dm} dm}{\int_0^a dm} = \frac{-a \int_0^a X e^{-dm} dm}{a} = - \int_0^1 X e^{-dm} dm$$

الكتلة عبارة عن مساحة

Page: _____

(ج) ثقب - أن مركز كتلة حلقة دائرية رفيعة متساوية الكثافة هو مركزها الهندسي.



الحل
نقسم الحلقة في الكتل a وكتلة كل كتلة $a d\theta$
ونقسم كل كتلة إلى عناصر طولها صغيرة متساوية
وأيضا $a d\theta$ - العناصر $a d\theta$
وبالتالي فإن كتلة هذه العناصر $dm = a d\theta$
 $x_c = a \cos \theta$, $y_c = a \sin \theta$

$$\bar{x} = \frac{\int_{2\pi} x_c dm}{\int_{2\pi} dm} = \frac{\int_{2\pi} a \cos \theta \cdot a d\theta}{\int_{2\pi} a d\theta} = \frac{\int_{2\pi} a^2 \cos \theta d\theta}{\int_{2\pi} a d\theta}$$

$$= \frac{a^2 \sin \theta \Big|_0^{2\pi}}{2\pi a} = \frac{a^2 (0 - 0)}{2\pi a} = 0$$

$$\bar{y} = \frac{\int_{2\pi} y_c dm}{\int_{2\pi} dm} = \frac{\int_{2\pi} a \sin \theta \cdot a d\theta}{\int_{2\pi} a d\theta} = \frac{\int_{2\pi} a^2 \sin \theta d\theta}{\int_{2\pi} a d\theta}$$

$$= \frac{-a^2 \cos \theta \Big|_0^{2\pi}}{2\pi a} = \frac{-a^2 (1 - 1)}{2\pi a} = 0$$

$(\bar{x}, \bar{y}) = (0, 0)$
وبالتالي فإن مركز كتلة حلقة دائرية رفيعة متساوية الكثافة هو مركزها الهندسي.

ملاحظة هامة:
عندما كان n في الجواب ∞ ، فإن مركز كتلة n من الأجزاء معلومة الكتلة ومركزها ، فإن مركز كتلة n من كتل n من الكتلة من الحلقة

$$\bar{x} = \frac{m_1 \bar{x}_1 + m_2 \bar{x}_2 + \dots + m_n \bar{x}_n}{m_1 + m_2 + \dots + m_n}$$

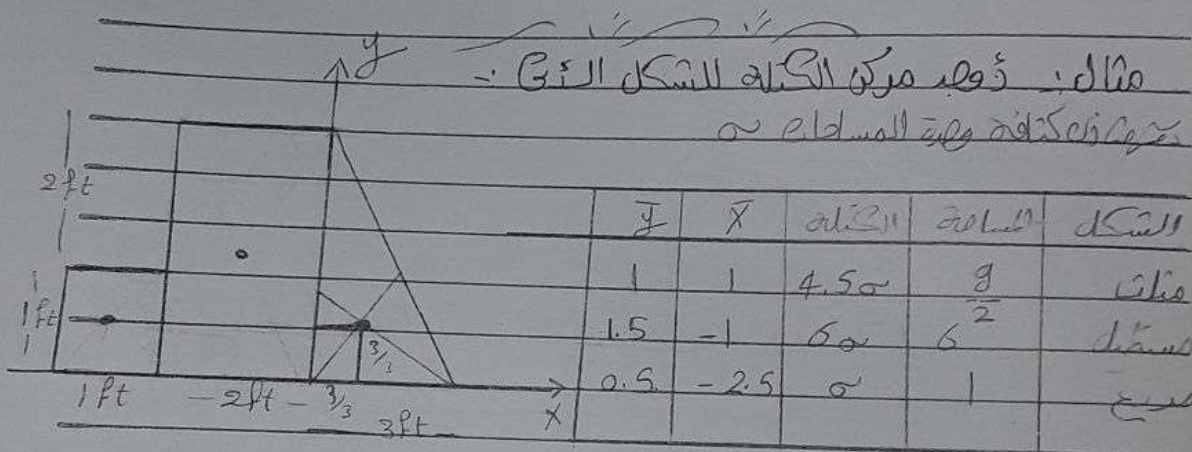
$$\bar{y} = \frac{m_1 \bar{y}_1 + m_2 \bar{y}_2 + \dots + m_n \bar{y}_n}{m_1 + m_2 + \dots + m_n}$$

بين من نفس المساحة
في طول السطح، أثبت

Page:

Date:

$$\begin{aligned} \bar{y} &= \frac{ha}{2} + \frac{h(b-a)}{6} = \frac{6ha + 2hb - 2ha}{12} \\ &= \frac{4ha + 2hb}{12} = \frac{2ha + hb}{6} = \frac{h(2a+b)}{3(a+b)} \end{aligned}$$



$$\bar{x} = \frac{m_1\bar{x}_1 + m_2\bar{x}_2 + m_3\bar{x}_3}{m_1 + m_2 + m_3} = \frac{(1)(1) + (1.5)(1.5) + (0.5)(0.5)}{1 + 1.5 + 0.5} = \frac{1 + 2.25 + 0.25}{3} = \frac{3.5}{3} = \frac{7}{6}$$

$$\bar{x} = \frac{-8}{23}$$

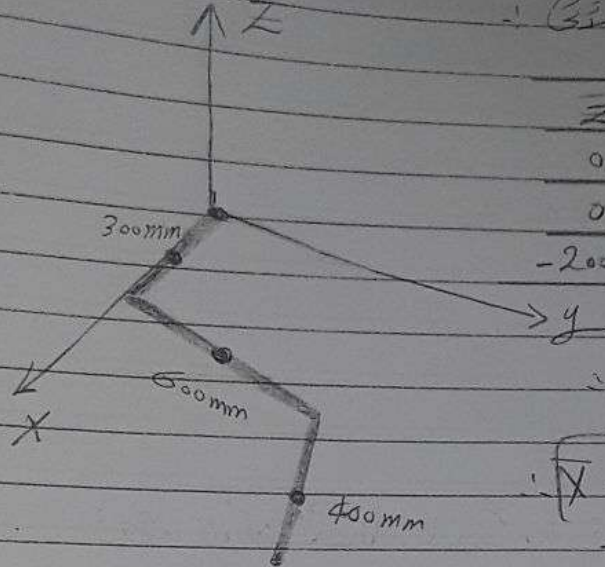
$$\bar{y} = \frac{m_1\bar{y}_1 + m_2\bar{y}_2 + m_3\bar{y}_3}{m_1 + m_2 + m_3} = \frac{(1)(2) + (1.5)(1) + (0.5)(0)}{1 + 1.5 + 0.5} = \frac{2 + 1.5 + 0}{3} = \frac{3.5}{3} = \frac{7}{6}$$

$$\bar{y} = \frac{28}{23}$$

$$\therefore \text{مركز الكتلة} = \left(\frac{-8}{23}, \frac{28}{23} \right)$$

مركز ثقل المقع في شكل (ب)
 $\Delta m = W$ (عند المركز)

أولاً مركز الثقل للمقطع (ب)



$\bar{z}$	$\bar{y}$	$\bar{x}$	المساحة	المساحة
0	0	150	$W(300)$	(1)
0	300	300	$W(600)$	(2)
-200	600	300	$W(400)$	(3)

$$\bar{X} = (300W)(150) + (600W)(300) + (400W)(600)$$

$$\bar{X} = \frac{4650}{13}$$

$$\bar{y} = \frac{(300W)(0) + (600W)(300) + (400W)(600)}{1300W} = \frac{4200}{13}$$

$$\bar{z} = \frac{(300W)(0) + (600W)(0) + (400W)(-200)}{1300W} = \frac{-800}{13}$$

$$\therefore \left(\frac{4650}{13}, \frac{4200}{13}, \frac{-800}{13} \right)$$

✓✓✓

من نقطتين من نفس
21 طول المسافة. أريد

المسألة
Date: $\frac{1}{2} m$
 $\frac{1}{2} m$
 $\frac{1}{2} m$

المسألة
مساحة رقيقة متساوية المساحة والكتلة 9m على شكل
مثلث ABC ومساحة الكتل 4m, 2m, 5m عند النقطة A
4 أضلاع AC على الترتيب، أريد أن يكون مركز كتلة المجموعة يتركز على
مستقيم AD.

↓

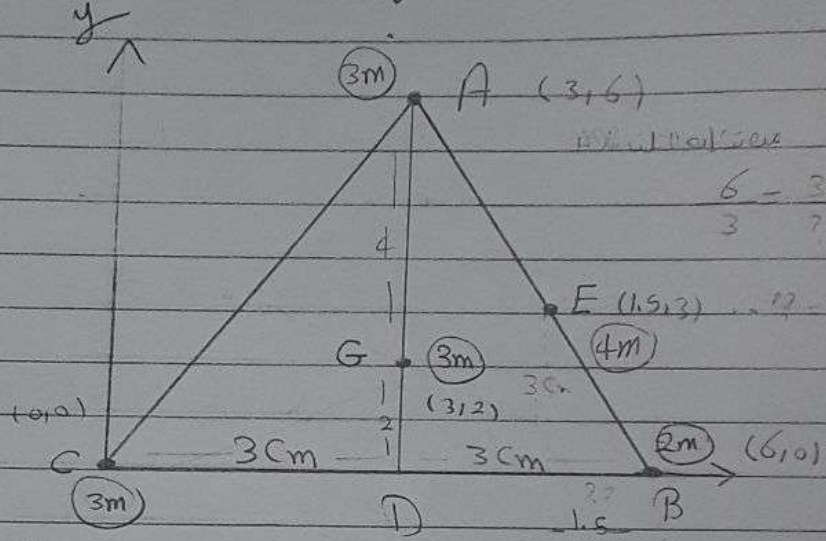
$$\sum m_i x_i$$

المسألة 16: شريط معدني كتلته 3m، وارتفاعه 6m، وAD = BC = 6cm

AD = 3m، وارتفاعه 6m، وAD = BC = 6cm

A, B, C, E هي 3m, 2m, 3m, 4m من شريط معدني

على الترتيب من E منقطة A، مركز كتلة الشريط



المسألة 16

y	x	المسألة 16
0	0	C هي 3m
2	3	G هي 3m
6	3	A هي 3m
0	6	B هي 2m
3	4.5	E هي 4m

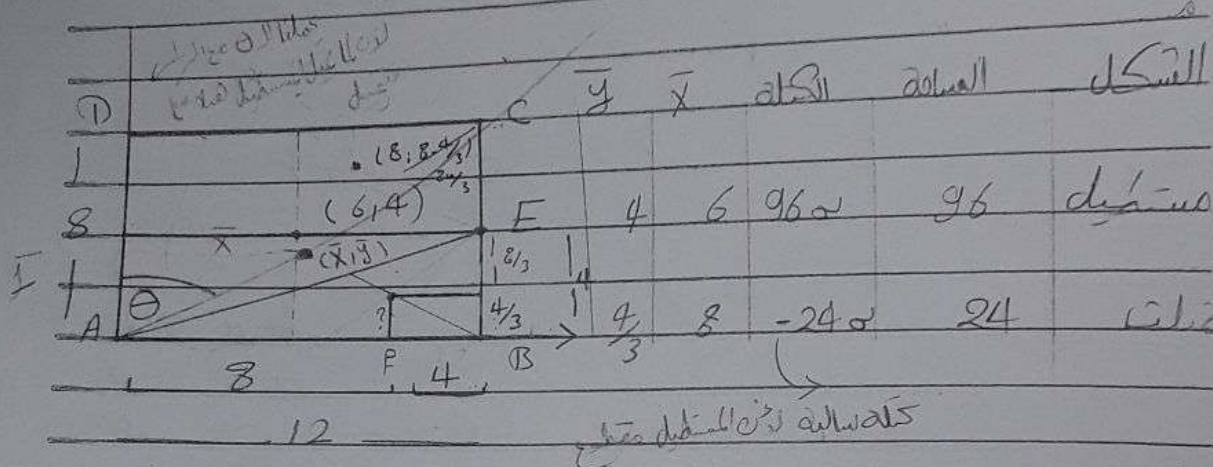
$$\bar{X} = \frac{\sum m_i x_i}{\sum m_i} = \frac{(3m \times 0) + (3m \times 3) + (3m \times 3) + (2m \times 6) + (4m \times 4.5)}{3m + 3m + 3m + 2m + 4m}$$

$$\bar{X} = [3.2] \text{ cm}$$

$$\bar{y} = \frac{(3m \times 0) + (3m \times 2) + (3m \times 6) + (2m \times 0) + (4m \times 3)}{3m + 3m + 3m + 2m + 4m} = [2.4] \text{ cm}$$

Date: 20/11/23

مثال: مساحة مستطيل ABCD هي 96 سم²، وإذا كانت E نقطة على BC بحيث BE = 4 سم، فما مساحة المثلث ABE؟
 الحل: مساحة المثلث ABE = $\frac{1}{2} \times BE \times AB = \frac{1}{2} \times 4 \times 12 = 24$ سم².



$$\bar{x} = \frac{m_1 \bar{x}_1 + m_2 \bar{x}_2}{m_1 + m_2} = \frac{(96\text{ سم}^2)(6) - (24\text{ سم}^2)(8)}{96\text{ سم}^2 - 24\text{ سم}^2} = \frac{16}{3}$$

$$\bar{y} = \frac{m_1 \bar{y}_1 + m_2 \bar{y}_2}{m_1 + m_2} = \frac{96\text{ سم}^2 \times 4 - 24\text{ سم}^2 \times 4/3}{96\text{ سم}^2 - 24\text{ سم}^2} = \frac{44}{9}$$

وبالتالي فإن إحداثيات مركز الثقل هي $(\bar{x}, \bar{y})$ ووفقاً لـ
 المحاور الرأسية والافقية للثلاثية.

$$\tan \theta = \frac{\bar{x}}{\bar{y}} = \frac{16/3}{44/9} = \frac{12}{11}$$

وبالتالي فإننا نجد أن مركز الثقل يقع على المثلث DEC، وهذا يعني أن مركز الثقل يقع داخل المثلث DEC.

مساحة DEC = 24 سم²، مساحة ABE = 24 سم²، ومساحة ABCD = 96 سم².

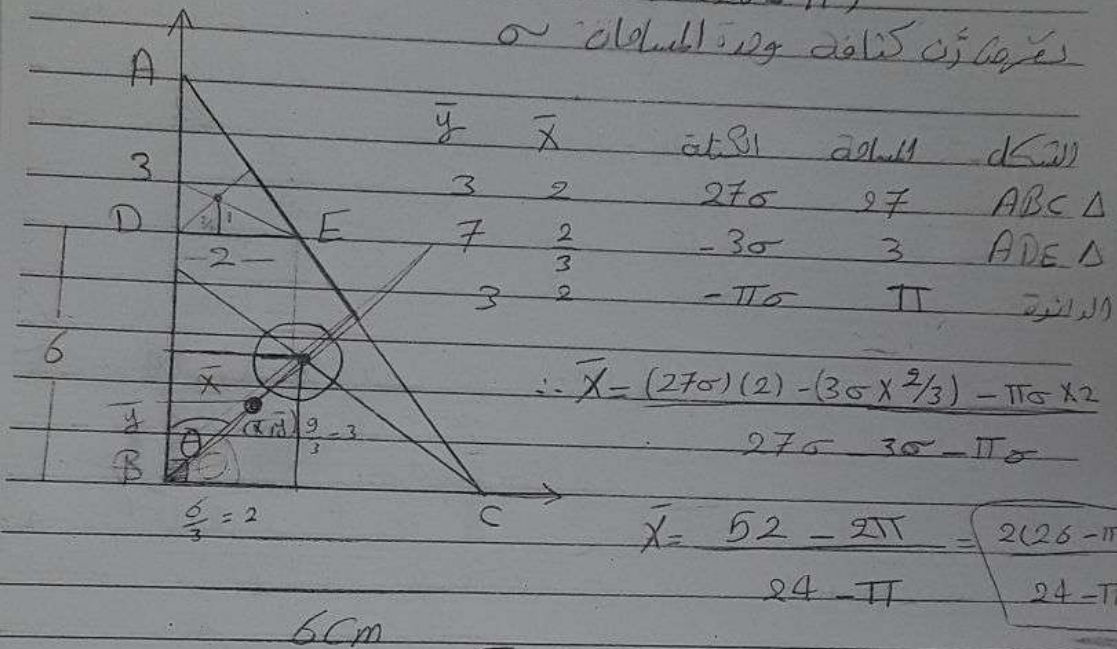
$$\bar{x} = \frac{96\text{ سم}^2 \times 6 - 24\text{ سم}^2 \times 8 + 24\text{ سم}^2 \times 8}{96\text{ سم}^2 + 24\text{ سم}^2 - 24\text{ سم}^2} = 6$$

$$\bar{y} = \frac{96\text{ سم}^2 \times 4 - 24\text{ سم}^2 \times 4/3 + 24\text{ سم}^2 \times 8/3}{96\text{ سم}^2 + 24\text{ سم}^2 - 24\text{ سم}^2} = \frac{16}{3}$$

مثال: مربعة منتظمة السواء والارتفاع على شكل مثلث ABC مركزه النقطة O وقائم الزاوية في B وكان $AB = 9\text{ cm}$ و $BC = 6\text{ cm}$. اربع المثلث ADE والدائرة التي مركزها O ونقطتها E وقطرها $AD = 3\text{ cm}$ وكان AB و AD تقاطع في D نقطة تقع على AB وكان $AD = 3\text{ cm}$ ونقطتها E تقاطع مع الموازي من D للقاعدة BC . فإذا كلف الجزء المثلث من B تكليفاً حراً فأترن بصي أرشح AB ليضع زاوية θ مع الرأس O ثمن

$$3(20 - \pi) \tan \theta = 2(26 - \pi)$$

لنحسب ثمن كثافة وحدة المسافات



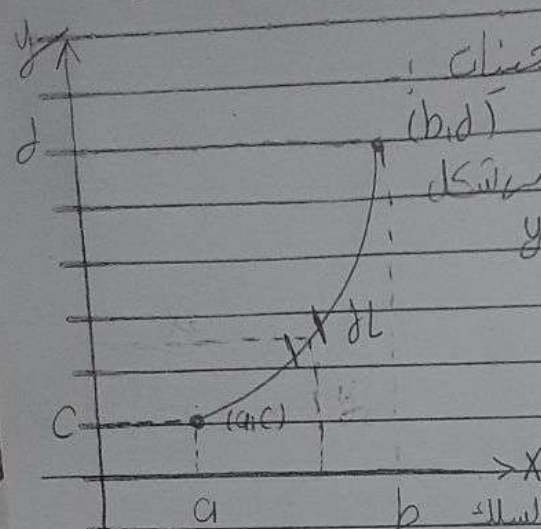
وعند التكليف من النقطة B اربع مركز الدائرة O وافتنا على الصور التي المثلثات المتكافئة B .

$$\therefore \tan \theta = \frac{\bar{X}}{\bar{y}} = \frac{2(26 - \pi)}{24 - \pi} \cdot \frac{24 - \pi}{3(20 - \pi)} = \frac{2(26 - \pi)}{3(20 - \pi)}$$

المحاضرة الثانية

م. الله الرحمن الرحيم

تساوی مرکز کماله غلطوال المنعینان



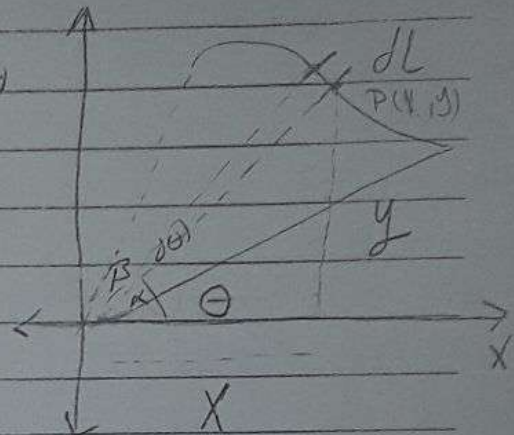
(b,d)
إذا كان التوزيع حالة عبارة عن مسلك على شكل
منه مسلك مساوية $y = f(x)$ حيث
لبن النقطة (a,c) , (b,d)

← 5. 2. 6. مركز النقد (5)

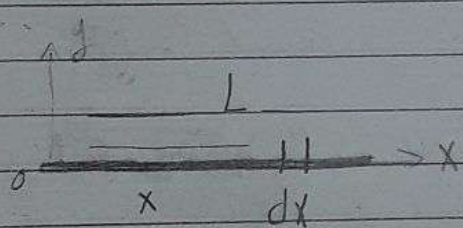
• وإذا كانت الحالة في المود القلبية $r = f(\theta)$ فإن

$$x = r \cos \theta, \quad y = r \sin \theta$$

$$dL = \sqrt{r^2 + \left(\frac{dr}{d\theta}\right)^2} d\theta$$



مثال ١: ثوب مركز كتلة القصب التي طولها L وكثافتها الطولية تناسب مع البعد العمودي عن إحدى طرفيها.



الحل

نفرض أن القصب متجانس على محور السينات x وبفرض أن كتلة العنصر dm ونقسم القصب إلى عناصر طولها dx وإذا فرضنا أن $dm = c \cdot dx$ ونوازن القصب متجانس على محور x $dm = c \cdot dx$ ونفرض عن العنصر dm على بعد x من الطرف o .

$$\therefore dm \propto x \Rightarrow dm = cx$$

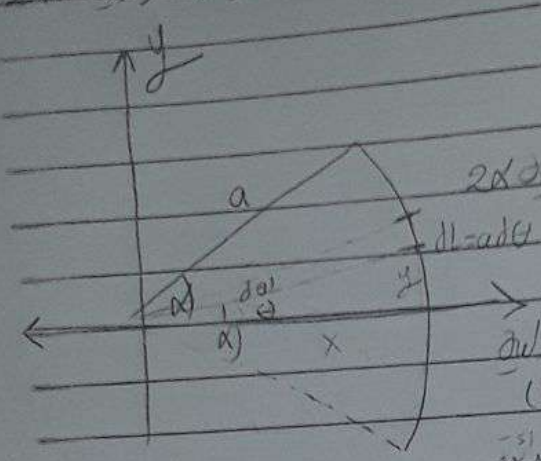
$$\therefore dm = c \cdot dx = cx \cdot dx$$

$$\therefore \bar{x} = \frac{\int_0^L x \cdot dm}{\int_0^L dm} = \frac{\int_0^L x \cdot cx \cdot dx}{\int_0^L cx \cdot dx} = \frac{\int_0^L x^2 \cdot dx}{\int_0^L x \cdot dx}$$

$$= \frac{\frac{1}{3} x^3 \Big|_0^L}{\frac{1}{2} x^2 \Big|_0^L} = \frac{\frac{1}{3} L^3}{\frac{1}{2} L^2} = \left(\frac{2}{3} L \right)$$

المساحة
 $\frac{1}{2} \pi r^2$
 نصف الدائرة

١٠) ثقل مركز كتلة سلك دائري منتظم الكثافة يقابل زاوية 2α عن مركز الدائرة.



الحل
 افترض نصف قطر الدائرة هو a
 ولأختيار محور الدوران لنضع الزاوية 2α
 فهو محور x والناظر في مركز
 الدائرة (x, y)

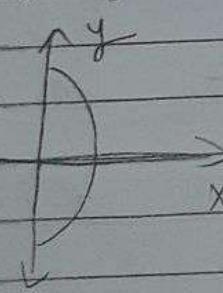
ولنقسم السلك العناصر طولية dl
 ونضع نقطة العنصر (x, y)
 كل ذلك ويقابل الزاوية $d\theta$ عن مركز الدائرة
 $x = a \cos \theta$, $y = a \sin \theta$

$$dm = \lambda dl = \lambda a d\theta$$

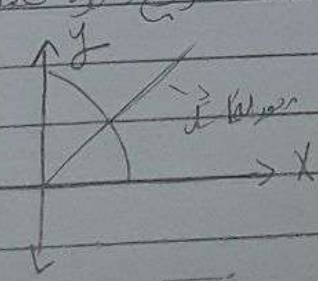
$$\therefore \bar{x} = \frac{\int x dm}{\int dm} = \frac{\int_{-\alpha}^{\alpha} a \cos \theta \cdot \lambda a d\theta}{\int_{-\alpha}^{\alpha} \lambda a d\theta} = \frac{2 \int_0^{\alpha} a \cos \theta d\theta}{\int_{-\alpha}^{\alpha} d\theta}$$

$$\bar{x} = \frac{2a \sin \theta \Big|_0^{\alpha}}{\theta \Big|_{-\alpha}^{\alpha}} = \frac{2a \sin \alpha}{\alpha - (-\alpha)} = \frac{2a \sin \alpha}{2\alpha} = \left[\frac{a \sin \alpha}{\alpha} \right]$$

لذا إذا كان مركز كتلة قوس $\frac{\pi}{2}$ راديان $\alpha = \frac{\pi}{2}$ كل يوم

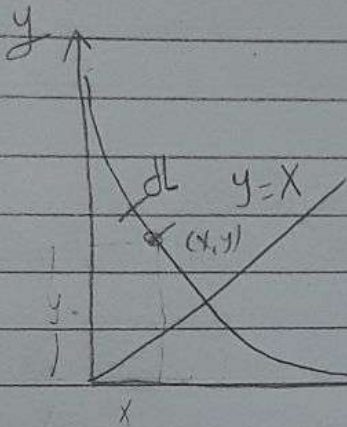


مركز كتلة قوس $\frac{\pi}{4}$ راديان $\alpha = \frac{\pi}{4}$ كل يوم



مثال: أوجد مركز كتلة الموصى المتكامل الكثافة التي يتبع
على المنحنى الذي لقيم $X \geq 0$ و $Y \geq 0$.

$$X^{2/3} + Y^{2/3} = a^{2/3}$$



هذا واضح أن المنحنى

$$X^{2/3} + Y^{2/3} = a^{2/3}$$

متكامل حول المستقيم $Y=X$

أي أن مركز الثقل يقع على هذا المستقيم

فإذا كان إحداثي مركز الكتلة $(\bar{X}, \bar{Y})$

$$\bar{X} = \bar{Y}$$

ونحتاج من حساب إحداثي

تأخذنا عن طول dl عن النقطة (x, y) على المنحنى
ونكتب dl عبارة عن

$$X^{2/3} + Y^{2/3} = a^{2/3}$$

$$Y^{2/3} = a^{2/3} - X^{2/3} \Rightarrow Y = (a^{2/3} - X^{2/3})^{3/2}$$

$$dL = \sqrt{1 + \left(\frac{dY}{dX}\right)^2} dX$$

$$\therefore \frac{dY}{dX} = \frac{3}{2} \cdot \frac{-2}{3} X^{1/3} (a^{2/3} - X^{2/3})^{1/2}$$

$$= -X^{1/3} (a^{2/3} - X^{2/3})^{1/2} = -\frac{(a^{2/3} - X^{2/3})^{1/2}}{X^{1/3}}$$

$$\therefore \left(\frac{dY}{dX}\right)^2 = \frac{(a^{2/3} - X^{2/3})}{X^{2/3}} = a^{2/3} X^{-2/3} - 1$$

$$dL = \sqrt{1 + a^{2/3} X^{-2/3} - 1} = a^{1/3} X^{-1/3}$$

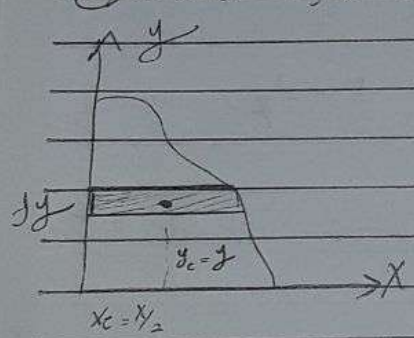
$$dL = a^{1/3} x^{-1/3} dx$$

$$\bar{X} = \frac{\int x dm}{\int dm} = \frac{\int_0^a a^{1/3} x^{2/3} dx}{\int_0^a a^{1/3} x^{-1/3} dx} = \frac{\frac{3}{5} x^{5/3} \Big|_0^a}{\frac{3}{2} x^{2/3} \Big|_0^a}$$

$$= \left[\frac{2}{5} a \right]$$

• مركز كتلة المساحة السوية الممتدة بالمساحة المثلثية.

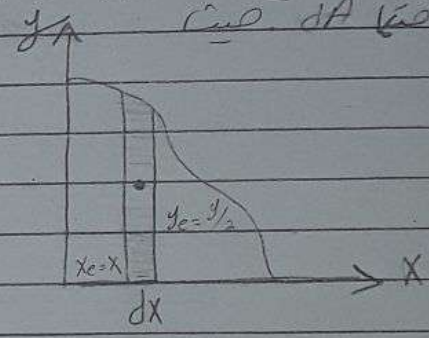
1) إذا كان نوع المساحة (مربعة) ممتدة كثافتها σ موزونة بمقدار مكافئ $P(x) = y$ لنقطة مركز كتلة المربعة، نقسم المساحة إلى شرائح مستطيلة رأسية أو أفقية أو قطرية وأيضاً نكتب الشرائح مساحة dA حجم



إذا لو الشريحة أفقية
 $x_c = \frac{x}{2}, y_c = y$

$$dA = x dy$$

$$dm = \sigma x dy$$



إذا لو الشريحة رأسية
 $x_c = x, y_c = \frac{y}{2}$

$$dA = y dx$$

$$dm = \sigma y dx$$

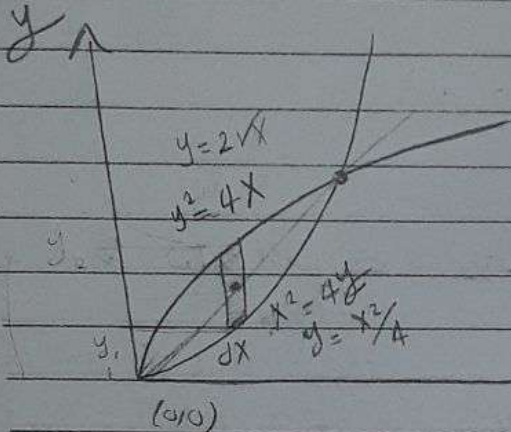
مثال : أوجد مركز كتلة منطقة مسطحة الكثافة على شكل

المساحة المحدودة بين القطعتين $x^2 = 4y$ و $y^2 = 4x$

← قطع مكافئ
محور y

$$y^2 = 4x$$

← قطع مكافئ
محور x



نوجد أولاً نقطة التقاطع بين المنحنيين

$$\therefore y^2 = 4x, \quad x^2 = 4y$$

$$y^4 = 16x^2 \Rightarrow y^4 = 16 \cdot 4y$$

$$y^3 = 64 \Rightarrow y = 4$$

$$\therefore 16 = 4x \Rightarrow x = 4$$

إذاً نقطة التقاطع هي (4,4) و (0,0)

بتقسيم المساحة إلى شرائح مستطيلة رأسية عرضها dx

وطولها $(2\sqrt{x} - \frac{x^2}{4})$ وبالتالي فإن

$$dm = \sigma dA = \sigma (2\sqrt{x} - \frac{x^2}{4}) dx$$

ومركز الكتلة عند النقطة $(\bar{x}, \frac{y_1 + y_2}{2})$ وبالتالي فإن

$$\bar{x} = \frac{\int_0^4 x dm}{\int_0^4 dm} = \frac{\int_0^4 x \sigma (2\sqrt{x} - \frac{x^2}{4}) dx}{\int_0^4 \sigma (2\sqrt{x} - \frac{x^2}{4}) dx}$$

$$\int_0^4 (2x^{3/2} - \frac{x^3}{4}) dx = \frac{4}{5} x^{5/2} - \frac{x^4}{16} \Big|_0^4 = \frac{48}{5}$$

$$\int_0^4 (2\sqrt{x} - \frac{x^2}{4}) dx = \frac{4}{3} x^{3/2} \Big|_0^4 - \frac{x^3}{12} \Big|_0^4 = \frac{16}{3}$$

$$\bar{X} = \frac{9}{5}$$

$$\bar{y} = \frac{1}{m} \int y \, dm = \frac{1}{m} \int \left(\frac{y_1 + y_2}{2} \right) dm$$

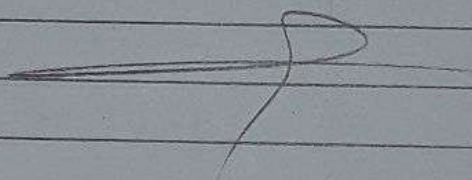
$$\frac{y_1 + y_2}{2} = \frac{2\sqrt{x} + x^2/4}{2}$$

$$\therefore \bar{y} = \frac{\sigma}{m} \int_0^4 \left(2\sqrt{x} + \frac{x^2}{4} \right) \cdot \left(2\sqrt{x} - \frac{x^2}{4} \right) dx$$

$$= \frac{\sigma}{2m} \int_0^4 \left(4x - \frac{x^4}{16} \right) dx = \frac{\sigma}{2m} \left[2x^2 - \frac{x^5}{80} \right]_0^4$$

$$= \frac{48}{5m} = \frac{48}{5} \cdot \frac{3}{16} = \left[\frac{9}{5} \right]$$

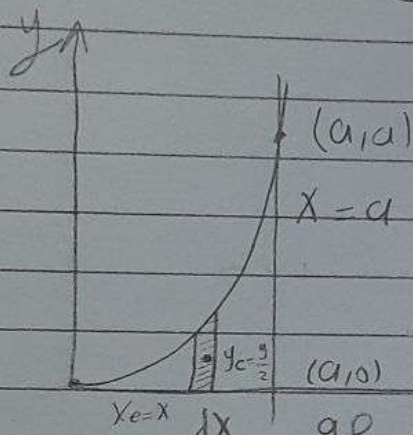
$$\therefore (\bar{X}, \bar{y}) = \left(\frac{9}{5}, \frac{9}{5} \right)$$



مثال ١ - نرسم المساحة المحددة بالمعادلة $x^2 = ay$ والمستمدة من
 $x=a$, $y=0$ ثم نطلب مركز كتلة تلك المساحة

الحل

المعادلة $x^2 = ay$ هي معادلة قطع مكافئ متساو الجوانب
 في النطاق الأول



نقسم المساحة على شرائح عرضية

عنصر المساحة $dA = dx \cdot y$

$$\therefore dm = \sigma dA = \sigma y dx$$

$$x_c = x, \quad y_c = \frac{y}{2}$$

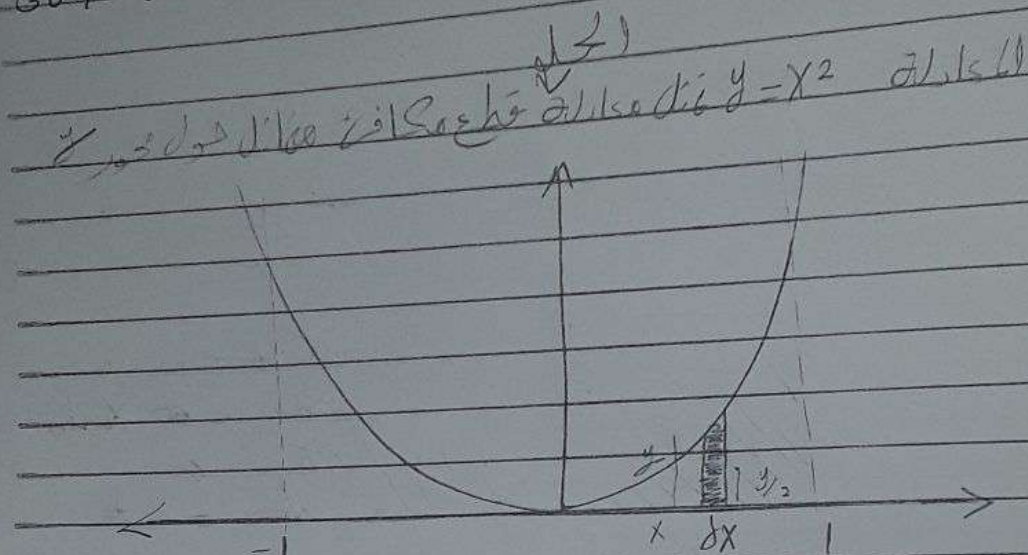
$$\bar{x} = \frac{\int_0^a x \cdot \sigma y dx}{\int_0^a \sigma y dx} = \frac{\int_0^a x \cdot \frac{x^2}{a} \sigma dx}{\int_0^a \sigma \cdot \frac{x^2}{a} dx}$$

$$\bar{x} = \frac{\int_0^a \frac{\sigma}{a} x^3 dx}{\int_0^a \frac{\sigma}{a} x^2 dx} = \frac{\frac{1}{4} a^4}{\frac{1}{3} a^3} = \left(\frac{3}{4} a \right)$$

$$\bar{y} = \frac{\int_0^a \frac{y}{2} \cdot \sigma y dx}{\int_0^a \sigma y dx} = \frac{\int_0^a \frac{x^4}{2a^2} dx}{\int_0^a \frac{x^2}{a} dx} = \frac{2.5a^2}{\frac{a^3}{3a}} = \left(\frac{3}{10} a \right)$$

$$\therefore (\bar{x}, \bar{y}) = \left(\frac{3}{4} a, \frac{3}{10} a \right)$$

مثال: أوجد مركز كتلة صفيحة مستوية متجانسة الكثافة على شكل المساحة الموضحة لكل محور السينات وفسد المنحنى $y = x^2$ في الفترة (1, 1).



من الرسم نلاحظ أن محور المماس هو محور غانل الصفيحة كلها وبالتالي فإن مركز كتلة الصفيحة يكون (1, 1) ومن غانل الجزيئات بين وبار محور المماس فإن $\bar{y}$ لها نفس سواها $\bar{x}$ للصفيحة كلها، لذلك نستقوم بحساب $\bar{x}$ للصفيحة فقط.

صفيحة $\rightarrow$ بتقسيم المساحة إلى شرائح على هيئة مستطيلات رأسية وتأخذ ثقل العناصر طولها y وسماكتها dx وبالتالي فإن

$$dm = \sigma dx = \sigma y dx = \sigma x^2 dx$$

$$x_c = x, y_c = \frac{y}{2}$$

$$\therefore \bar{y} = \frac{\int y_c dm}{\int dm} = \frac{\int_0^1 \frac{1}{2} \sigma x^2 dx}{\int_0^1 \sigma x^2 dx} = \frac{\frac{1}{2} \int_0^1 x^2 dx}{\int_0^1 x^2 dx}$$

$$= \frac{1}{2} \cdot \frac{\frac{1}{3}}{\frac{1}{3}} = \frac{1}{2}$$

في ملحوظة) سجد هو الكمال في المساحة للصفيحة المستوية

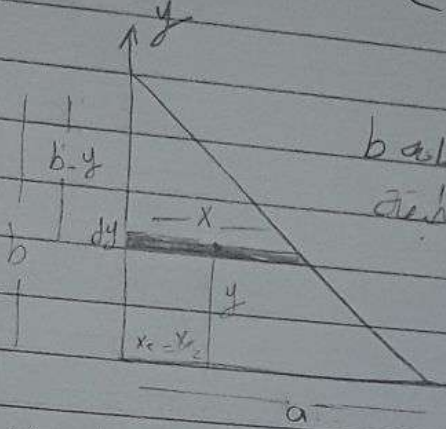
مسألة ١٠

$$\frac{dy}{dx} \rightarrow 0: b$$

$$\frac{dx}{dy} \rightarrow 0: a$$

مسألة ١٠ قال كثافة كتافته
مع ان طاع عن القاعدة فالفضل
Page:
تأثير السطح أو حجم

مثال / ثوبه مركز كتلة صفيحة على شكل مثل قائم الزاوية
وتتناسب كثافته طردياً مع الارتفاع عن القاعدة .
الحل



نقضي ان طول قاعدة المثل a وارتفاعه b
ونحن نقتطع ارضاء طاع الارتفاعات متغيرة
على راس المثل قائم الزاوية
ونقسم الصفيحة الى شرائح
رقيقة على هيئة مستطيلات

$$dm = \sigma dx dy$$

بما ان كثافة المثل σ تتناسب طردياً مع الارتفاع عن القاعدة

$$\sigma \propto y \Rightarrow \sigma = cy$$

$$\therefore dm = \sigma c x y dy$$

لازىء نجيء ان x يتناسب الى
مع تساوى المثلثات

$$\frac{x}{a} = \frac{b-y}{b}$$

$$\therefore x = \frac{a}{b} (b-y) \Rightarrow dm = c \sigma \frac{a}{b} (b-y) y dy$$

$$x_c = \frac{x}{2}, \quad y_c = y$$

$$\bar{X} = \frac{\int_0^b x_c \cdot dm}{\int_0^b dm} = \frac{\int_0^b \frac{x}{2} \cdot c \sigma \frac{a}{b} (b-y) y dy}{\int_0^b c \sigma \frac{a}{b} (b-y) y dy}$$

$$= \frac{a}{2b} \frac{\int_0^b (b-y)^2 y dy}{\int_0^b (b-y) y dy} = \frac{a}{2b} \frac{\int_0^b (b^2 y - 2by^2 + y^3) dy}{\int_0^b (by - y^2) dy}$$

$$= \frac{a}{2b} \left[\frac{b^2 y^2}{2} - \frac{2by^3}{3} + \frac{y^4}{4} \right]_0^b - \frac{a}{2b} \frac{b^4}{2b} = \frac{a}{4}$$

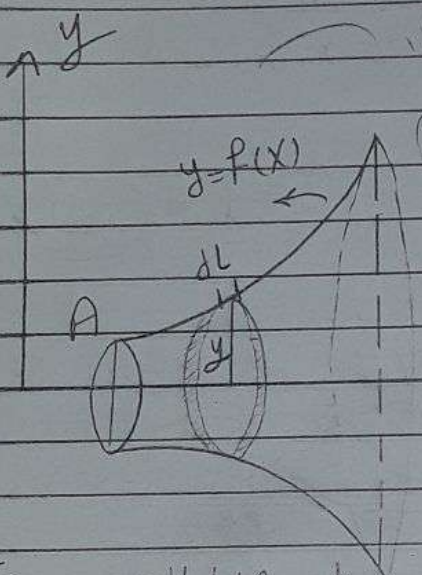
مساحة من نقطة
مساحة يساوي
مساحة الزاوية

Page:

Date:

$$\bar{y} = \frac{\int y \cdot \sigma (b-y) dy}{\int \sigma (b-y) dy} = \frac{\int_0^b (by^2 - y^3) dy}{\int_0^b (by - y^2) dy}$$

$$\bar{y} = \frac{by^3/3 - y^4/4 \Big|_0^b}{by^2/2 - y^3/3 \Big|_0^b} = \frac{\frac{b^4}{12}}{\frac{b^3}{6}} = \frac{b}{2}$$



• مركز كتلة المسطح النوراني

ليكن مركز كتلة المسطح الناتج من دوران القوس AB من المحور $y=f(x)$ دورة كاملة حول x .

من الواضح ان المحور x محور ثقل المسطح الناتج من دوران القوس AB دورة كاملة حول محور x . وبالتالي فإن مركز كتلة المسطح النوراني هو $(\bar{x}, 0)$.

نفترض طول طول dL من القوس ونبين ان هذا العنصر دورة كاملة حول x يشجع عن سطح عبارة عن دائرة نصف قطرها y وسماها dL وبالتالي فإن كتلة العنصر

$$dm = \sigma dA = \sigma (2\pi y) dL$$

الكتلة x المحط

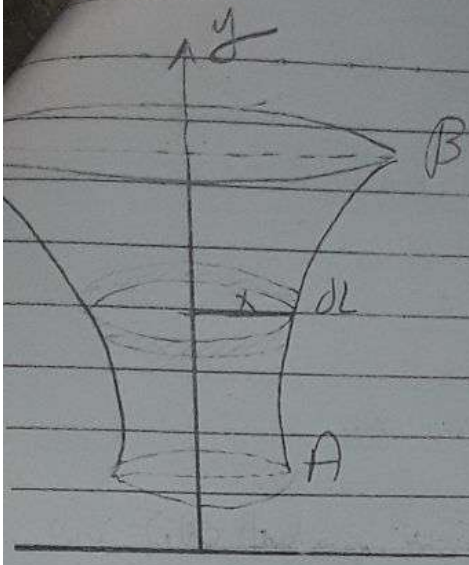
$$\bar{x}_c = x, \quad \bar{y}_c = 0$$

$$\bar{X} = \frac{\int \bar{x}_c dm}{\int dm} = \frac{\int_A^B x (2\pi y) dL}{\int_A^B 2\pi y dL}$$

$$\bar{y} = 0$$

" لأن محور x محور ثقل الشكل "

ROX



• التوزيع هو y

$$dm = \sigma dA = \sigma (2\pi x) dl$$

$$x_c = a, \quad y_c = y$$

$$\bar{y} = \frac{\int_A^B y (2\pi x) dl}{\int_A^B (2\pi x) dl}$$

x

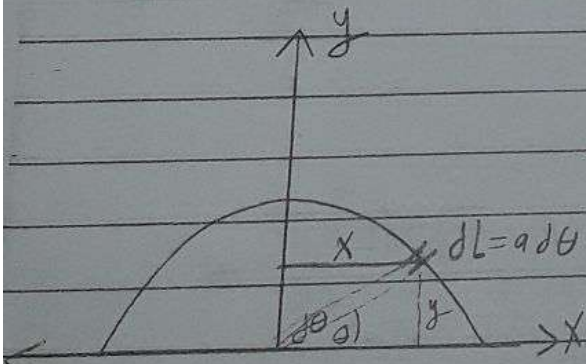
• المساحة في المنحنى

عند حل مسائل الهندسة الشكل ونفساً بقول الشكل اذا كان
مع دوران y يعني مثلاً نصف الكرة نتج من دوران قوس
ربع كرة، الخروط نتج من دوران قوس راسم.

مثال: ثوبه هو كوكب نصف كرة معوجة مستقيمة.

الحل

من الواضح ان نصف الكرة هو على سطح نصف كرة معوجة دوران
قوس على شكل ربع دائرة.



y

بفرصة ان نصف كوكب الكرة هو a ومن الرسم واضح
ان محور نصف الكرة هو y وبالنسبة فان مركز النصف يكون دائرة

المساحة
السطح
المنحني

Page: _____

Date: _____

وإذا أخذنا عنصر طول dl والارتفاع dx عن المحور x

$$dm = \sigma (2\pi x) dl = \sigma (2\pi x) a d\theta$$

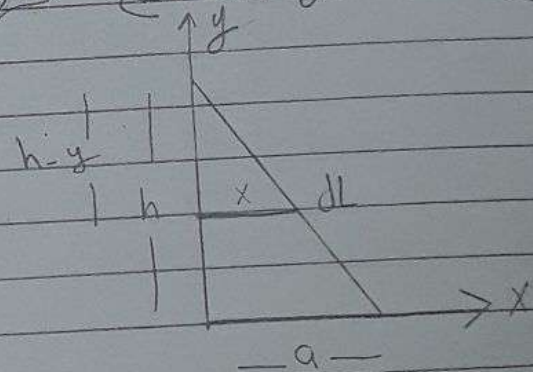
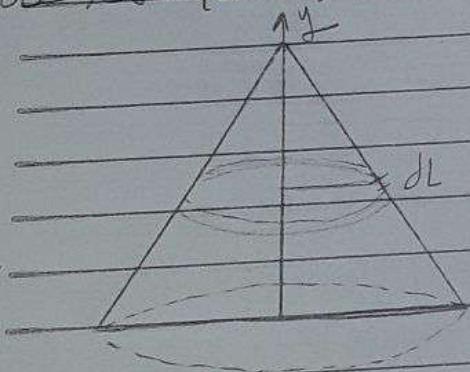
حيث $x = a \cos \theta$, $y = a \sin \theta$

$$\therefore dm = (2\pi \sigma a^2) \cos \theta d\theta$$

$$\therefore \bar{y} = \frac{\int_{-\pi/2}^{\pi/2} y dm}{\int_{-\pi/2}^{\pi/2} dm} = \frac{\int_{-\pi/2}^{\pi/2} (2\pi \sigma a^2) \cos \theta \cdot a \sin \theta d\theta}{\int_{-\pi/2}^{\pi/2} (2\pi \sigma a^2) \cos \theta d\theta}$$

$$\bar{y} = \frac{\int_{-\pi/2}^{\pi/2} a \cos \theta \sin \theta d\theta}{\int_{-\pi/2}^{\pi/2} \cos \theta d\theta} = \frac{a/2 \sin^2 \theta \Big|_{-\pi/2}^{\pi/2}}{\sin \theta \Big|_{-\pi/2}^{\pi/2}} = \left[\frac{a}{2} \right]$$

(مثال) أوجد مركز كتلة سطح مخروط دائري قائم منتظم السطوح والارتفاع h



نقسمه إلى أقسام صغيرة العرض dl وارتفاع h مع الواضح أن مركز الكتلة للمخروط هو $(0, \bar{y})$ والعرض حول محور y ومن المهم أن نذكر أن محور x هو محور تماثل للمخروط وبالتالي فإن مركز التماثل يكون $(0, \bar{y})$

وإذا أخذنا عنصر طول dl على ارتفاع y وبعد عن محور العرض بـ x

وإذا أخذنا هذا العنصر dl حول المحور y ينتج لحظة الزخم $dm = \sigma (2\pi x) dl$

$$\frac{x}{a} = \frac{h-y}{h}$$

Δ Δ calculation

$$x = f(y)$$

$$\Rightarrow dl = \sqrt{1 + \left(\frac{dx}{dy}\right)^2} dy$$

Calculation of x is done using $y = f(x)$ calculation
 Limit of x is 0 to a

$$x = \frac{a}{h} (h-y) \Rightarrow \frac{dx}{dy} = -\frac{a}{h}$$

$$\left(\frac{dx}{dy}\right)^2 = \left(\frac{a}{h}\right)^2$$

$$\therefore dl = \sqrt{1 + \left(\frac{a}{h}\right)^2} dy$$

$$\therefore dm = \sigma (2\pi) \frac{a}{h} (h-y) \sqrt{1 + \left(\frac{a}{h}\right)^2} dy$$

$$\therefore \bar{y} = \frac{\int_0^h \frac{2\pi\sigma a}{h} \sqrt{1 + \left(\frac{a}{h}\right)^2} (hy - y^2) dy}{\int_0^h \frac{2\pi\sigma a}{h} \sqrt{1 + \left(\frac{a}{h}\right)^2} (hy) dy}$$

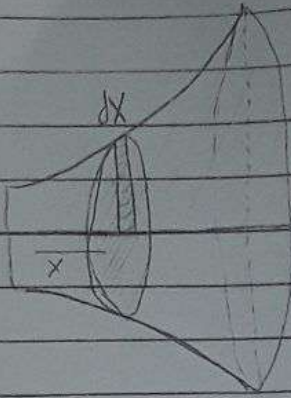
$$= \frac{\int_0^h (hy - y^2) dy}{\int_0^h (hy) dy} = \frac{hy^2/2 - y^3/3 \Big|_0^h}{hy - y^2/2 \Big|_0^h}$$

$$= \frac{h^3/2 - h^3/3}{h^2 - h^2/2} = \frac{h}{3}$$

Date: _____

مركز كتلة الحجم الدورانية

y



الحجم الدوراني الناتج من دوران المساحة الخاصة حول محور x

بافتراض انقسام المساحة الى شرائح مستطيلة موازية لمحور y وتكون كل شريحة x

عرضها y وتكون طولها dx وتكون مساحتها dx

واذا دار الشكل دورة كاملة حول محور x

فإن حجمه هو $dV = (\pi y^2) dx$

المساحة x المساحة

$$\therefore dm = \rho \pi y^2 dx$$

$$\therefore \bar{X} = \frac{\int_a^b x \rho \pi y^2 dx}{\int_a^b \rho \pi y^2 dx} = \frac{\int_a^b x y^2 dx}{\int_a^b y^2 dx}$$

P

مثال ثوب مركز كتلة نصف كرة متجانسة

واضح من الشكل اننا نأخذ نصف كرة متجانسة نصفها

المساحة ربع دائرة

y

y



x

x

بافتراض اننا نأخذ شريحة عرضها dy ومساحتها dx والمساحة دورتها كاملة حول محور x

فإن حجمها هو $dV = (\pi x^2) dy$

المساحة x المساحة

$$x_c = x, \quad y_c = y$$

$$\bar{y} = \frac{\int_0^a y_c dm}{\int_0^a dm} = \frac{\int_0^a \pi \rho y x^2 dy}{\int_0^a \pi \rho x^2 dy}$$

الكمية المتبقية المتبقية x وبالتالي يجب حذف المتغير x

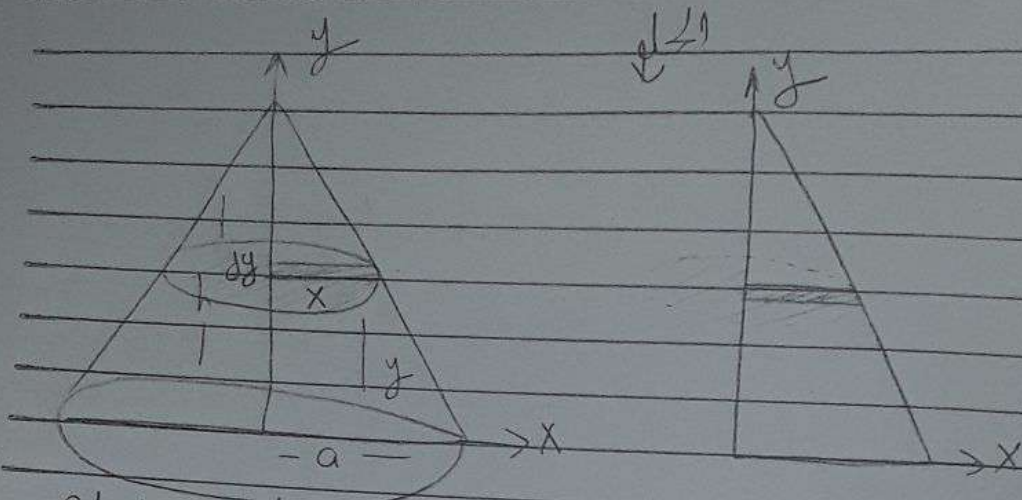
معادلة الدائرة $x^2 + y^2 = a^2 \Rightarrow x^2 = a^2 - y^2$

$$\begin{aligned} \int_0^a y(a^2 - y^2) dy &= \int_0^a (a^2 y - y^3) dy \\ &= \frac{a y^2}{2} - \frac{y^4}{4} \Big|_0^a = \frac{a^4}{4} \end{aligned}$$

$$\int_0^a (a^2 - y^2) dy = a^2 y - \frac{y^3}{3} \Big|_0^a = \frac{2a^3}{3}$$

$$\therefore \bar{y} = \frac{a^4 \cdot \frac{3}{2a^3}}{4} = \boxed{\frac{3a}{8}}$$

أوجد مركز كتلة جسم مخروطي منتظم الشكل مخروط دائري قائم.



بقدره أن نصف قاعدة مخروط له a وارتفاعه h ، ومركزه cm من القواعد ينتج عن دوران مثلث قائم الزاوية، في ذلك محور x هو محور قاعدة المخروط وبالنسبة لمركز الثقل (الذي ينقسم المساحة إلى اثنين) كل هذبة من هذبات جوانب المخروط في دورانه حول محور y ينتج قوس دائري نصفه x وطوله dy .

$$dm = \rho (\pi x^2) dy$$

$$\bar{y} = \frac{\int_0^h y x^2 dy}{\int_0^h x^2 dy}$$

$$= \frac{\int_0^h \left(\frac{a}{h}\right)^2 y (h^2 - 2hy + y^2) dy}{\int_0^h \left(\frac{a}{h}\right)^2 (h-y)^2 dy}$$

$$= \frac{\int_0^h (h^2 y - 2h y^2 + y^3) dy}{\int_0^h (h^2 - 2hy + y^2) dy} = \frac{\left[\frac{h^2 y^2}{2} - \frac{2}{3} h y^3 + \frac{y^4}{4} \right]_0^h}{\left[h^2 y - h y^2 + \frac{y^3}{3} \right]_0^h} = \frac{\frac{h^3}{4}}{\frac{h^3}{3}} = \frac{h}{4}$$

تقوية بالبولس :- تستخدم لكي نوجد الحجم المول من الدوران
حول محور X ، Y

الحجم المول من الدوران حول محور X

$$V_x = \pi \bar{y}^2 S$$

مساحة السطح المول

الحجم المول من الدوران حول محور Y

$$V_y = \pi \bar{x}^2 S$$

هام جداً

أرسم المساحة المصنوعة بالمنحنى $X^2 = ay$ والمستقيمان

$X=a$ ، $Y=0$ ثوب (أ) مركز كتلة تلك المساحة

(ب) مركز كتلة الحجم المول من تلك المساحة دورة كاملة حول محور X

(ج) الحجم الناتج من دوران تلك المساحة بزوايا $0, 2\pi$ حول

كل من محاور الإحداثيات

الحل

$X^2 = ay$ مثل معادله قطع مكافئ متطابق

حول محور Y

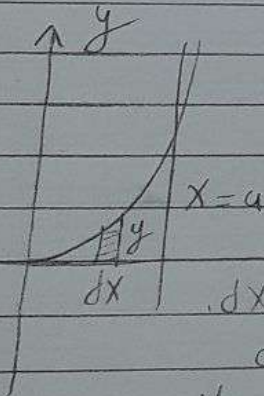
لن نأخذ مركز كتلة تلك المساحة

لنفرض بتقسيم المساحة إلى شرائح مستطيلة X

وزن تلك الشرائح طوله Y وسماكة dX

$$dm = \sigma (Y dX)$$

$$X_c = X , Y_c = \frac{Y}{2}$$

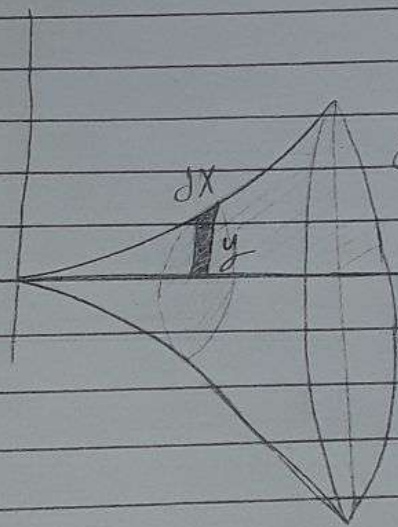


Date: _____

$$\bar{x} = \frac{\int_0^a xy \, dx}{\int_0^a y \, dx} = \frac{\int_0^a x^3/a \, dx}{\int_0^a x^2/a \, dx} = \frac{x^4/4a \Big|_0^a}{x^3/3a \Big|_0^a} = \frac{3a}{4}$$

$$\bar{y} = \frac{\int_0^a y^2/2 \, dx}{\int_0^a y \, dx} = \frac{\frac{1}{2} \int_0^a x^4/a^2 \, dx}{\int_0^a x^2/a \, dx} = \frac{\frac{1}{2} \cdot \frac{x^5/5 \Big|_0^a}{x^3/3 \Big|_0^a}}{\frac{1}{2a} \cdot \frac{3a^5}{5a^3}} = \frac{3a^5}{10a^3} = \frac{3a}{10}$$

لحساب مركز كتلة الحجم للثوبل مستطال الـ y دورة كاملة حول محور x (5)



نقسم المساحة الى شرائح مستطال
موازية لمحور x طولها y وسماها dx
فاننا نأخذ دورة كاملة حول محور x
والثوبل قوسا حجمه dV حيث

$$dV = \pi y^2 dx = \pi \frac{x^4}{a^2} dx$$

$$dm = \frac{\pi \rho x^4}{a^2} dx$$

و نأخذ محور x مائل خارج مركز الثقل يكون $(\bar{x}, 0)$

$$\bar{x} = \frac{\int_0^a x \cdot x^4 dx}{\int_0^a x^4 dx} = \frac{x^6/6 \Big|_0^a}{x^5/5 \Big|_0^a} = \frac{5a}{6}$$

الدور الثاني من دورات تلك الساعة حول محور X

$$V_x = A \bar{y} \cdot S$$

من الدور الثاني (الدورة)

$$S = \int_0^{ap} y dx = \int_0^{ap} \frac{1}{a} x^2 dx = \left[\frac{1}{3} x^3 \right]_0^{ap}$$

$$\therefore V_x = A \left(\frac{a^2}{3} \right) \left(\frac{3a}{10} \right) = \left[\frac{1}{10} A a^3 \right]$$

الدور الثالث من دورات تلك الساعة حول محور Y

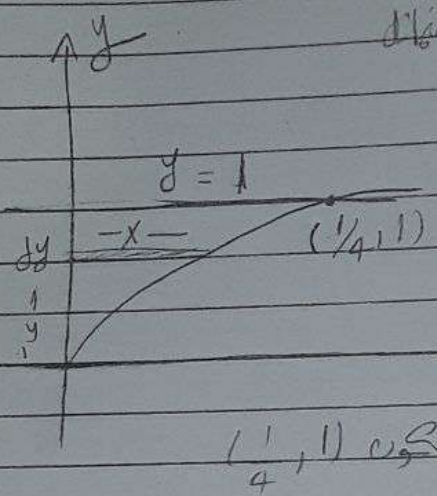
$$V_y = A S \bar{x} = \left(\frac{3a}{4} \right) \left(\frac{a^2}{3} \right) A = \left[\frac{A a^3}{4} \right]$$

q.b $\alpha = 2\pi$



أرسم المساحة المستوية المنكبة للعدد بالخط $y^2 = 4x$ والمستقيمات $x=0$ ، $y=1$ ، $x=1$ ، $y=1$.
 (أ) مركز ثقل تلك المساحة ،
 (ب) مركز ثقل الحجم الناتج عن الدوران دورة كاملة حول محور y .
 الحل

$y^2 = 4x$.
 حول محور x .
 كمثل معادله قطع في اقصاه



أولاً : إيجاد نقاط تقاطع المنحنى $y^2 = 4x$ مع المستقيم $y=1$

$$1 = 4x \Rightarrow x = \frac{1}{4}$$

$$y = 2\sqrt{x} = 2\sqrt{\frac{1}{4}} = 1$$

ب : نقطة التقاطع تكون $(\frac{1}{4}, 1)$

ثانياً : إيجاد مركز ثقل تلك المساحة (5)
 نقوم بتقسيم المساحة الشرائح على هيئة مستطيلات زوفاية
 طولها x وسماها dy ،
 $x_c = x/2$ ، $y_c = y$

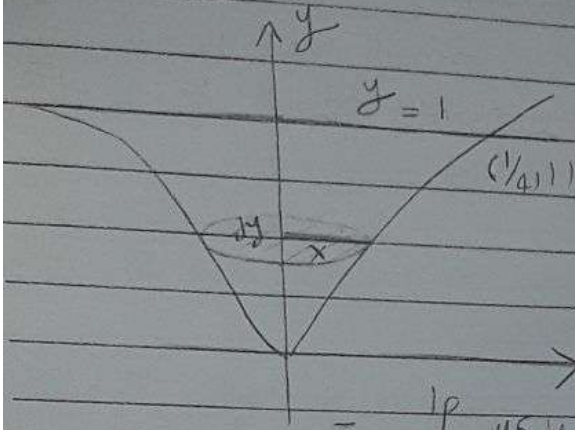
$$dm = \sigma \cdot x dy = \sigma \frac{y^2}{4} dy$$

$$\bar{x} = \frac{1}{2} \int_0^1 x \frac{\sigma}{4} y^2 dy = \frac{1}{2} \int_0^1 x y^2 dy = \frac{1}{2} \int_0^1 \frac{y^4}{4} dy = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{20} = \frac{1}{20}$$

$$\int_0^1 \frac{\sigma}{4} y^2 dy = \frac{\sigma}{4} \int_0^1 y^2 dy = \frac{\sigma}{4} \cdot \frac{1}{3} = \frac{\sigma}{12}$$

$$\bar{y} = \frac{\int_0^1 y dm}{\int_0^1 dm} = \frac{\int_0^1 \frac{\sigma}{4} y^3 dy}{\int_0^1 \frac{\sigma}{4} y^2 dy} = \frac{\frac{1}{4} \cdot \frac{3}{4}}{\frac{1}{3} \cdot \frac{3}{4}} = \frac{3}{4}$$

ثانياً / إيجاد مركز كتلة الجسم الناتج من دوران تلك المساحة دوراً كاملاً حول محور y .



$$dm = \rho (\pi x^2) dy$$

إحداثيات مركز الثقل $(\bar{x}, \bar{y})$

$$\bar{y} = \frac{\int y dm}{\int dm} = \frac{\int_0^1 y (\pi x^2) dy}{\int_0^1 \pi x^2 dy}$$

$$\bar{y} = \frac{\int_0^1 y 5 dy}{\int_0^1 y 4 dy} = \frac{1/6}{1/5} = \sqrt{\frac{5}{6}}$$

إيجاد الحجم الناتج من الدوران بزوايا α حول محور x .

$$V_x = \alpha \bar{y}$$

$$\bar{y} = \int_0^1 x dy = \int_0^1 \frac{y^2}{4} dy = \left[\frac{1}{12} \right]$$

$$V_x = \frac{1}{12} \cdot \frac{3}{4} \cdot \alpha = \left[\frac{\alpha}{16} \right]$$

والحجم الناتج من دوران دورة كاملة $\alpha = 2\pi$

$$\therefore V_x = \left[\frac{\pi}{8} \right]$$

ثالثاً / إيجاد مركز كتلة الجسم الناتج من دوران تلك المساحة دوراً كاملاً حول محور y .

$$V_y = \alpha \bar{x} = \alpha \cdot \left(\frac{1}{12} \right) \cdot \left(\frac{3}{4} \right) = \left[\frac{\alpha}{16} \right]$$

H.W

سؤال مترجم

أولاً: مفيدة مستوية منتظمة في كل شكل المساحة المصورة بالمفاتيح $x^2 - ay$ والمستقيم $y = a$ والفترة $x \geq 0$ وذا، الإجابة الصحيحة

(1) مساحة تلك المفيدة

- (a) $\frac{1}{3} a^2$ (b) $\frac{2}{3} a^2$ (c) $\frac{1}{2} a^2$

(2) مركز كتلة تلك المفيدة يبعد عن المحور x

- (a) $\frac{3}{5} a$ (b) $\frac{2}{3} a$ (c) $\frac{5}{8} a$

(3) مركز كتلة المفيدة المصورة بالمفاتيح $x^2 - ay$ والمستقيم $y = a$

- (a) $(\frac{3}{5} a, a)$ (b) $(a, \frac{3}{5} a)$ (c) $(a, \frac{2}{5} a)$

(4) الحجم المتولد من دوران تلك المساحة دورة كاملة حول محور x

- (a) $\frac{1}{2} \pi a^3$ (b) $\frac{4}{5} \pi a^3$ (c) $\frac{2}{5} \pi a^3$

(5) إذا دارت المفيدة في (أولاً) دورة كاملة حول المحور y فإن كتلة الجسم المتولد من هذه الدورة

- (a) $\frac{4}{3} \pi \rho a^3$ (b) $\frac{2}{3} \pi \rho a^3$ (c) $\frac{1}{2} \pi \rho a^3$

(6) مركز كتلة الجسم المتولد من هذه الدورة

- (a) $(\frac{2}{3} a, 0, 0)$ (b) $(a, \frac{2}{3} a, 0)$ (c) $(0, \frac{1}{3} a, 0)$

Answer

- (1) (b) (2) (a) (3) (b) (4) (b) (5) (c)

(6) (b)

ROX

H.W

Page:

5

نرسم المساحة المصورة بالندى $y = x^2$ و المستقيمة $y = x$ ، $x=1$
ثم نوجد مركز كتلة المساحة
(٢) مركز كتلة الحجم المتولد من الدوران دورة كاملة حول محور OX
(٣) الحجم الناشئ من دوران تلك المساحة بزواوية $\alpha = \frac{\pi}{3}$
حول كل من محوري الإحداثيات .

~~f~~

مثال / نوجد مركز ثقل المساحة المحصورة بين القطبتين اللاباقتين

$$x^2 = 4ay, \quad y^2 = 4ax$$

$$\left(\frac{9}{5}a, \frac{9}{5}a \right) \leftarrow \text{النقطة}$$

(H.W)

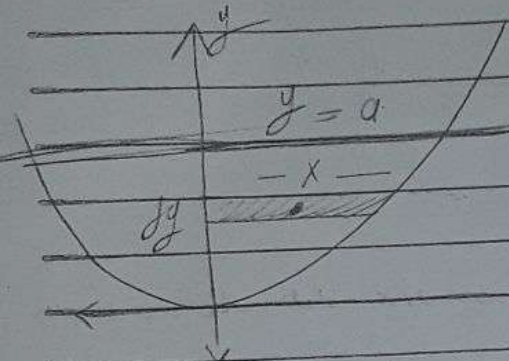
80

Page

Date

1. Find the

centroid of the area bounded by $x^2 = ay$ and $y = a$



centroid of the area

$$S = \int_0^a x dy = \int_0^a \sqrt{ay} dy$$

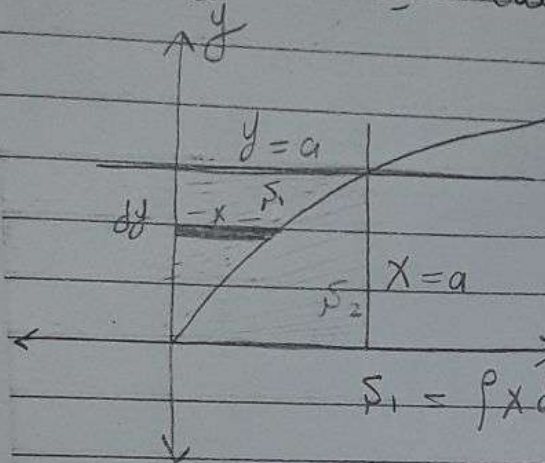
$$= \sqrt{a} y^{3/2} \cdot \frac{2}{3} \Big|_0^a = \frac{2}{3} a^2$$

$$dm = \sigma x dy \quad \text{where } x_c = x/2, y_c = y \quad (1)$$

$$\bar{X} = \frac{1}{2} \frac{\int_0^a x^2 dy}{\int_0^a x dy} = \frac{1}{2} \frac{\int_0^a ay dy}{\int_0^a \sqrt{ay} dy}$$

إذا كانت S_1 هي المساحة المصورة بالقطع الكاف $y^2 = ax$ والمثلث $y=a$ والمستقيم $x=0$ وكذلك S_2 هي المساحة المصورة بالقطع المستقيم $x=a$ والمستقيم $y=0$ وجب عن الطلبة إثبات

أ) وجب إثبات أن $\bar{x}_1, \bar{y}_1$ هما إحداثيات مركز كتلة المصورة المستوية S_1 .



بتقسيم المساحة S_1 إلى شرائح مستطيلة دقيقة ونفذ نفس الشرائح على S_2 وطول x وعرض dy كتلة

$$dm_1 = \sigma x dy = \sigma \frac{y^2}{a} dy$$

$$m_1 = \sigma \int_0^a \frac{1}{a} y^2 dy = \frac{\sigma}{a} \left[\frac{y^3}{3} \right]_0^a = \frac{\sigma a^2}{3}$$

$$S_1 = \int_0^a x dy = \int_0^a \frac{y^2}{a} dy = \left[\frac{y^3}{3a} \right]_0^a = \frac{a^2}{3}$$

$$x_c = \frac{x}{2}, \quad y_c = y$$

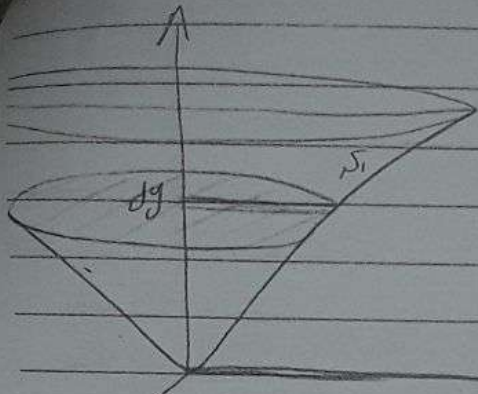
$$\bar{x} = \frac{\int_0^a x_c dm}{\int_0^a dm} = \frac{\int_0^a \frac{x}{2} \cdot \sigma \frac{y^2}{a} dy}{\int_0^a \sigma \frac{y^2}{a} dy} = \frac{\int_0^a \frac{1}{2a} y^4 dy}{\int_0^a y^2 dy} = \frac{\frac{1}{2a} \cdot \frac{1}{5} a^5}{\frac{1}{3} a^3} = \frac{3}{10} a$$

$$\bar{y} = \frac{\int_0^a y_c dm}{\int_0^a dm} = \frac{\int_0^a y \cdot \sigma \frac{y^2}{a} dy}{\int_0^a \sigma \frac{y^2}{a} dy} = \frac{\int_0^a y^3 dy}{\int_0^a y^2 dy} = \frac{\frac{1}{4} a^4}{\frac{1}{3} a^3} = \frac{3}{4} a$$

$$\bar{y} = \frac{3}{4} a$$

$$S_1 = \frac{a^2}{3}, \quad m_1 = \frac{\sigma a^2}{3}, \quad \bar{x}_1 = \frac{3}{10} a, \quad \bar{y}_1 = \frac{3}{4} a$$

ثانياً، لإيجاد مركز ثقل الحجم المتولد من دوران K_2 دورة كاملة



من دوران K_2 المساحة dS_2 دورة كاملة حول محور y ينج قوس دائرة نصف قطرها x ومساحة dS_2 ويكون

$$dV_3 = \pi x^2 dy$$

$$dm_3 = \rho \pi x^2 dy$$

$$x = x, \quad y = y$$

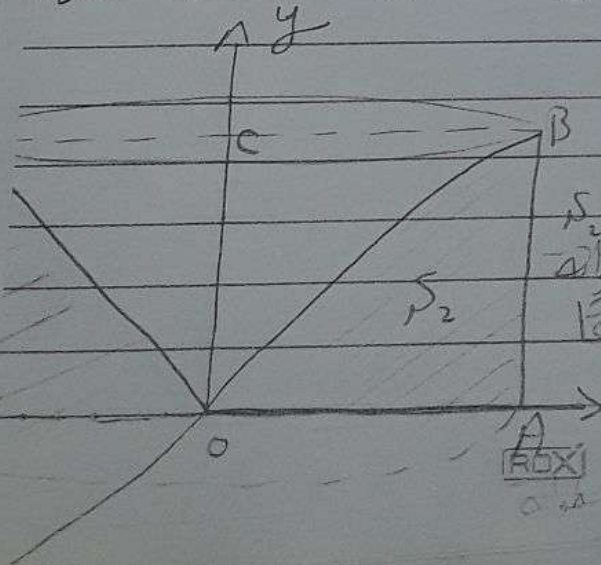
معادلة المساحة حول محور y فإن إحداثي مركز الثقل

$$\bar{y} = \frac{\int_0^a y dm}{\int_0^a dm} = \frac{\int_0^a y \rho \pi x^2 dy}{\int_0^a \rho \pi x^2 dy} = \frac{\int_0^a y^5 dy}{\int_0^a y^4 dy}$$

$$= \frac{\frac{1}{6} a^6}{\frac{1}{5} a^5} = \left(\frac{5}{6} a \right)$$

∴ إحداثي مركز الثقل $(0, \frac{5}{6} a)$

ثالثاً، مركز كتلة الحجم المتولد من دوران المساحة K_2 دورة كاملة حول محور y .



وأوضح أنه مركز كتلة الحجم المتولد من الدوران دورة كاملة للمساحة K_2 حول محور y - أي أن مركز التسطيح المتولدة من دوران المربع $OABC$ متطابقاً مع الحجم K_1 .

مركز كتلة K_1

مركز كتلة K_2

2-5 مفرقة مستوية كالأسفل نصف دائرة

حجم الأسطوانة $V = \pi a^3$ وكتلتها $m = \rho \pi a^3$ ، $\bar{y} = \frac{1}{2}a$ (مستوى ثقل)

ومن البقايل حول محور y فإنه مركز كتلة a ، م الدوران للساعة

$$y_4 = \frac{(\rho \pi a^3) (\frac{1}{2}a) - (\frac{\rho \pi a^3}{5}) (\frac{5}{6}a)}{\rho \pi a^3} = \left(\frac{5}{12}a \right)$$

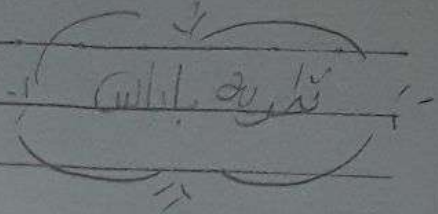
الأسطوانة مفرقة

منها الحجم المتحرك

مع y

وهذا انبعاث مركز الثقل $(0, \frac{5}{12}a)$

ساعتياً : ω هو مركز كتلة الجسم الكروي مع اتحاد المصعد الدوراني في (رابطاً) بفجأة الدائرية المائكة مع نصف قوة جاذبه او بوجه له حركته ، ونصف قطرها a . ثم درس نوع التوازن مع قيم التخميد ، وإذا أُنزل هذا الجسم بسطح الكروي ω ، ونفس على كلاً من (أ) مسطح أفقي ، (ب) سطح كروي نصف قطره a .

مساحة الدائرة = πr^2 مساحة نصف دائرة = $\frac{1}{2} \pi r^2$ 

(أ) إذا كانت مساحة مستطيل / مربع طول ضلعيه مسطويين

$$U_x = \alpha S_y, \quad U_y = \alpha S_x$$

(ب) إذا كان طول ضلعيه طول ضلعيه مسطويين، مساحة

$$S_y = \alpha L \bar{x}, \quad S_x = \alpha L \bar{y}$$

ملاحظة هامة / إذا كانت الدائرة الموضحة $\bar{x}, \bar{y}$ معادلتها

$$\bar{x} = \bar{y} = a$$

باعتبارها مركزاً بالوسط

(أ) أوجد مساحة السطح والدفع المتولد من دورة كاملة لدائرة

نصف قطرها a حول معادلتها

الحل

مساحة السطح المتولد من دورة كاملة لدائرة نصف قطرها a

حول معادلتها

$$\bar{x} = \bar{y} = a$$

$$P = \alpha L \bar{x} = (2\pi)(2\pi a)(a) = \boxed{(2\pi a)^2}$$

$$U = \alpha S \bar{x} = (2\pi)(\pi a^2)(a) = \boxed{2\pi^2 a^3}$$

(ب) ثقل مركز كتلة مفردة مستوية على شكل نصف دائرة
نصف قطرها a .

الحل



$$\pi a^2 = \text{مساحة الدائرة}$$

$$\frac{1}{2} \pi a^2 = \text{نصف مساحة الدائرة}$$

$$\text{في محور الـ } x \text{ للكتلة } K = \frac{1}{2} \pi a^2 \text{ كتلة}$$

حول محور الـ y يتولد دمج كرتي

$$I_y = K \bar{x}$$

$$\frac{4}{3} \pi a^3 = (2\pi) \left(\frac{1}{2} \pi a^2 \right) \bar{x}$$

$$\frac{4}{3} a = \pi \bar{x} \Rightarrow \bar{x} = \frac{4a}{3\pi}$$

$$\text{نقطة مركز الثقل } \left(\frac{4a}{3\pi}, 0 \right)$$

المسألة (ج) ثقل نصف الدائرة متجانسة حول محور x